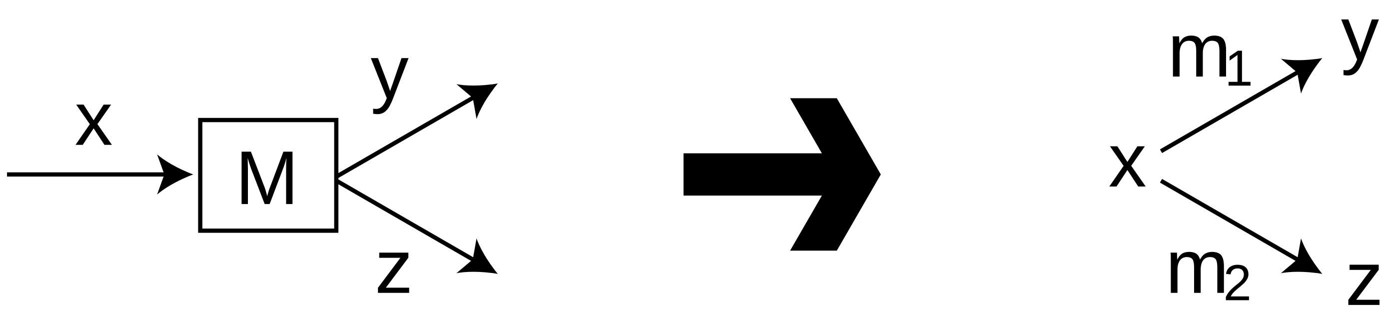
随伴函手による理論生物学に関する一考察

春名太一
神戸大学大学院自然科学研究科

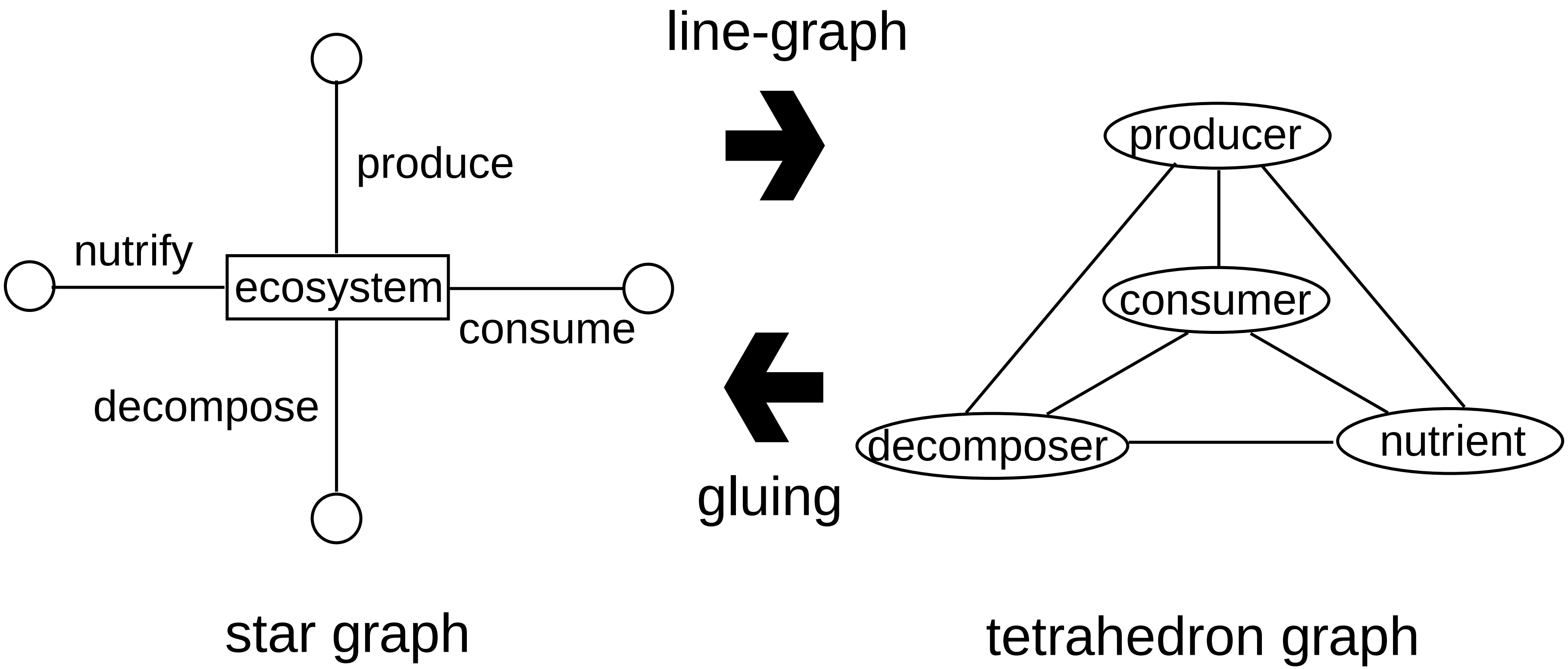
平成18年12月7日

理論生物学

- 対象をその機能へと分解して機能を単位としてシステムを捉える.
  - Rosen(1958a,1958b,1959) の abstract block diagram.
- 機能への分解の逆，つまり，機能を貼り合わせて対象を構成する操作も重要.
  - Paton(2002) の star graph と tetrahedron graph.
- 今日の話
  - 有向グラフの圏で考えると両者は随伴の関係にある.
  - 随伴で不変な構造：cycle の存在と anticipation.



Rosen's Abstract Block Diagram


line-graph
produce
nutrify
ecosystem
consume
decompose
gluing
producer
consumer
decomposer
nutrient
star graph
tetrahedron graph

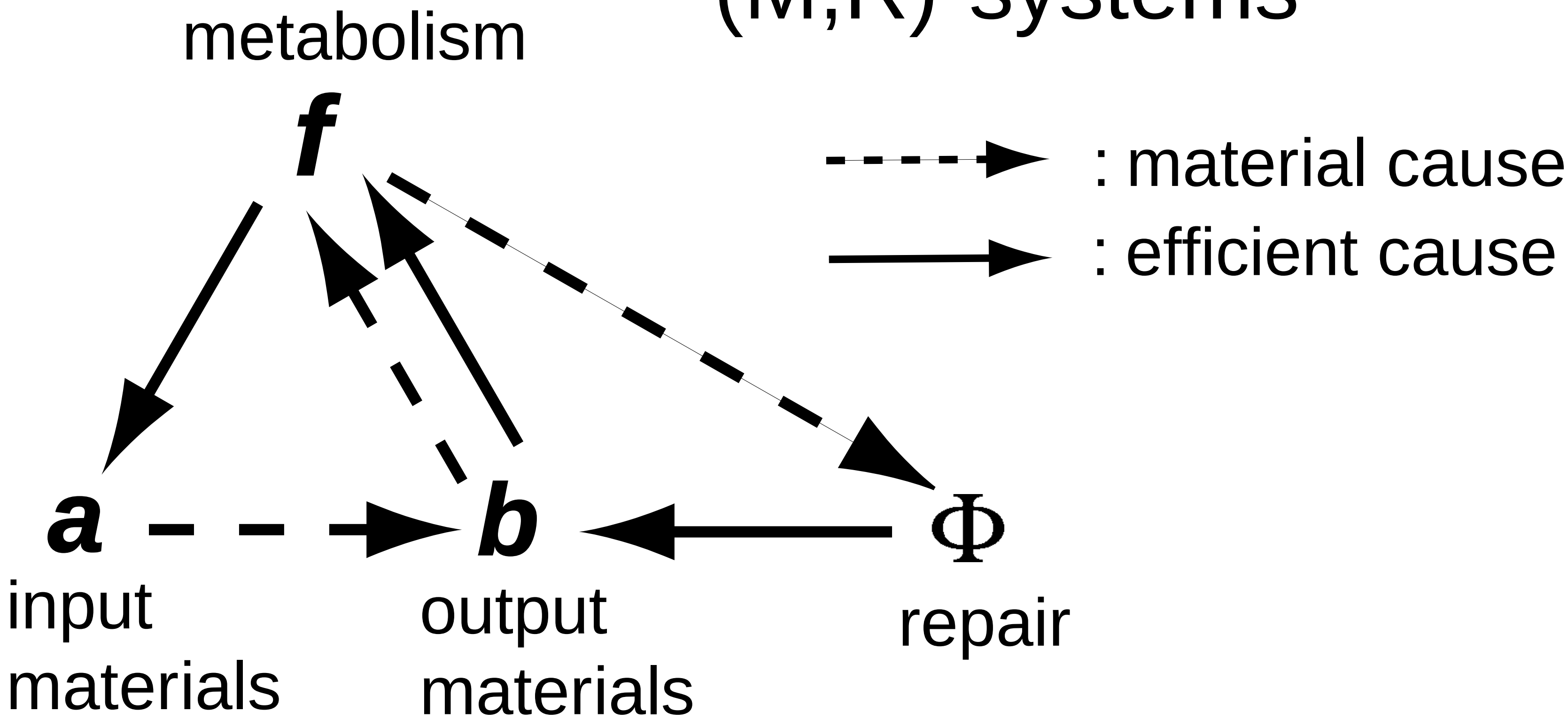
理論生物学的に重要な事柄

cycleの存在 作用因で閉じた(M,R)-system(Rosen,1991)はcycleの存在する有限グラフ.

予期(anticipation) Rosen(1985)の意味では「現在における状態の変化が,現在と過去だけではなく未来の状況に依存していること」であるが，ここでは一種の演繹(deduction)と仮説形成(abduction)のことと考える.

これらをどういう形式で表現するか，というのは一つの問題だが，今日の話では貼り合わせと分解で不変な構造としてこれらに相当すると思われる条件が出てくることをみたい.

(M,R)-systems


metabolism
f
: material cause
: efficient cause
a
b
Φ
input materials
output materials
repair

有向グラフの圏:$\mathcal{G}rph$

- 対象：有向グラフ$G = (A, O, \partial_0, \partial_1)$．$A$は有向辺の集合，$O$は結節点の集合．$\partial_i (i = 0, 1)$は$A$から$O$への写像で$\partial_0$は有向辺をその始点に，$\partial_1$は有向辺をその終点を対応させる写像である．

- 射: $G = (A, O, \partial_0, \partial_1)$から$G' = (A', O', \partial'_0, \partial'_1)$への射$D : G \to G'$は有向グラフの準同型．つまり写像$D_O : O \to O'$と$D_A : A \to A'$との組で$D_O \partial_i = \partial'_i D_A (i = 0, 1)$を満たすもの(以下の図式を可換にするもの).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D_A"] \arrow[d, "\partial_i"'] & A' \arrow[d, "\partial'_i"] \\ O \arrow[r, "D_O"] & O' \end{tikzcd}$$

$$G=(A,O,\partial_0,\partial_1)$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] & b \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[loop right, "h"] \end{tikzcd}$$

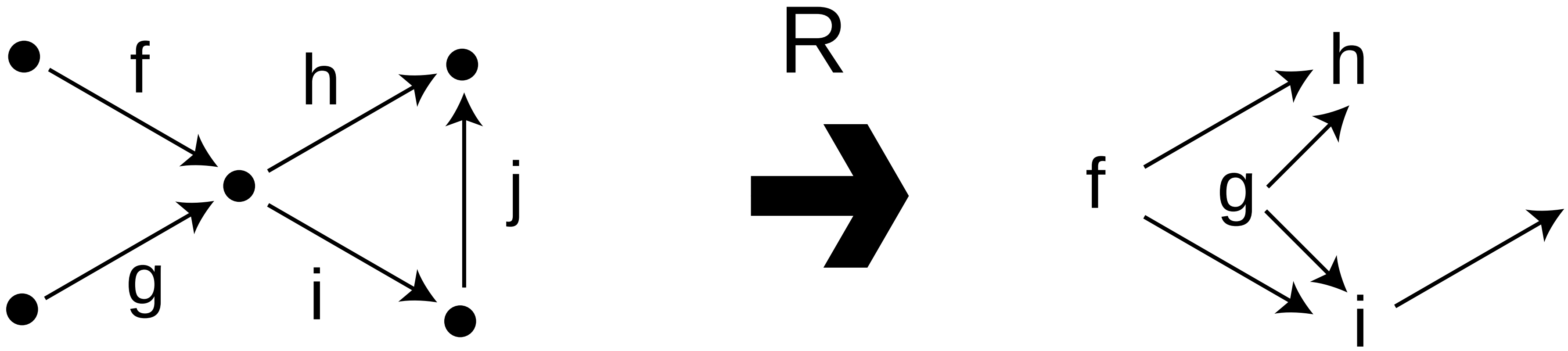
$$A=\{f,g,h\}$$
$$O=\{a,b\}$$

$$\partial_0 f=a,\ \partial_1 f=b$$
$$\partial_0 g=b,\ \partial_1 g=a$$
$$\partial_0 h=b,\ \partial_1 h=b$$

対象の機能への分解:Line-graph functor

有向グラフ$G = (A, O, \partial_0, \partial_1)$からその有向辺を結節点にした新しい有向グラフ$\mathcal{R}G = (\mathcal{R}A, \mathcal{R}O, \partial_0^{\mathcal{R}}, \partial_1^{\mathcal{R}})$を作る操作$\mathcal{R}$を考える.

- $\mathcal{R}A = \{(f, g) \in A \times A | \partial_1 f = \partial_0 g\}$.
- $\mathcal{R}O = A$.
- $(f, g) \in \mathcal{R}A$に対して$\partial_0^{\mathcal{R}}(f, g) = f, \partial_1^{\mathcal{R}}(f, g) = g$.
- $\mathcal{R}$は$\mathcal{G}rph$から自身への函手となっている.
- Gの結節点は有向辺同士をつなぐという機能を持ち, $\mathcal{R}G$ではこの機能が複数の有向辺へと分散している.


f
h
g
i
j
R
f
h
g
i
j

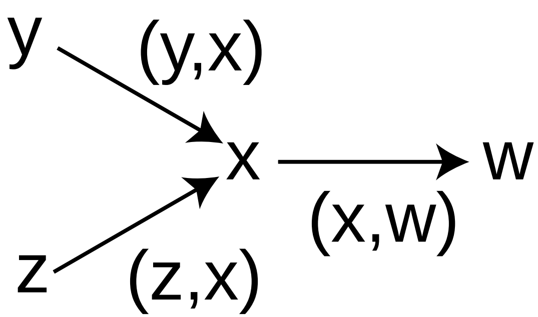
$\mathcal{R}$の'逆'を考える.

- $\mathcal{R}$は有向辺が結節点になったので，'逆'では結節点が有向辺になるはず.
- 新しい結節点はどうなるか？
  - $\mathcal{R}$では古い結節点の有向辺同士をつなぐという機能が新しい有向辺となった.
  - 古い結節点のこの機能は$\mathcal{R}G$の複数の有向辺へと分散している.
  - 従って$\mathcal{R}$の'逆'で結節点を構成するには分散している結節点の機能を貼り合わせればよいだろう.

機能の貼り合せによる対象の構成:$\mathcal{R}$の'逆'(その1)

有向グラフ $G = (A, O, \partial_0, \partial_1)$ から新しい有向グラフ $\mathcal{L}''G = (\mathcal{L}''A, \mathcal{L}''O, \partial_0^{\mathcal{L}''}, \partial_1^{\mathcal{L}''})$ を作る操作$\mathcal{L}''$を以下で定義しようとする.

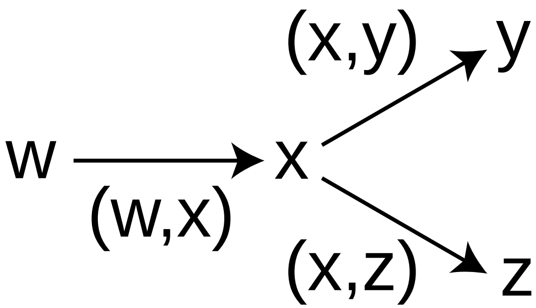
- $\mathcal{L}''A = O$.
- $\mathcal{L}''O = T/\sim''$.
  - $T = \{(x, y) \in O \times O | \exists f \in A\ \partial_0 f = x, \partial_1 f = y\}$.
  - $\sim''$は$(x, y)R''(z, w) \Leftrightarrow x = z$ or $y = w$で生成される同値関係.
- $\partial_0^{\mathcal{L}''}$及び$\partial_1^{\mathcal{L}''}$は，$x \in O$に対して$\partial_1 f = x$なる$f \in A$をとって$\partial_0^{\mathcal{L}''}x = [(\partial_0 f, \partial_1 f)]_{\sim''}$，$\partial_0 g = x$なる$g \in A$をとって$\partial_1^{\mathcal{L}''}x = [(\partial_0 g, \partial_1 g)]_{\sim''}$としたい.



L''

$$\{(y,x),(z,x)\} \xrightarrow{x} \{(x,w)\}$$

$$(y,x)\sim''(z,x)$$



L''

$$\{(w,x)\} \xrightarrow{x} \{(x,y),(x,z)\}$$

$$(x,y)\sim''(x,z)$$

- しかし，すべての $x \in O$ に対して $\partial_1 f = x$ なる $f \in A$ が存在するわけではないのでうまくいかない．

- $\partial_1^{\mathcal{L}''}$ についても同様．入力次数が0もしくは出力次数が0の x に対して定義できないのが問題．そこで…

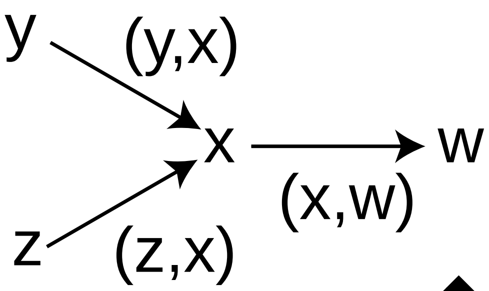
(I) 入力次数が 0 もしくは出力次数が 0 の x に対してもうまくいくよう $\mathcal{L}''O$ を修正する．
(II) 入力次数が0もしくは出力次数が0の x は考えなくていいようにする．つまり，$\mathcal{G}rph$ の部分圏で上の構成がうまくいくものを考える．

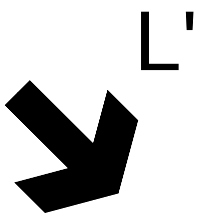
- まず，(I) の方向で考える (これは実質的には Pultr(1979) と同等な結果．ただし，そこでは $\mathcal{G}rph$ と多重辺のない有向グラフの圏の間で随伴を考えている)．

$\mathcal{R}$の‘逆’(仮修正版)

有向グラフ $G = (A, O, \partial_0, \partial_1)$ から新しい有向グラフ $\mathcal{L}'G = (\mathcal{L}'A, \mathcal{L}'O, \partial_0^{\mathcal{L}'}, \partial_1^{\mathcal{L}'})$ を作る操作(函手)$\mathcal{L}'$を以下で定義する.

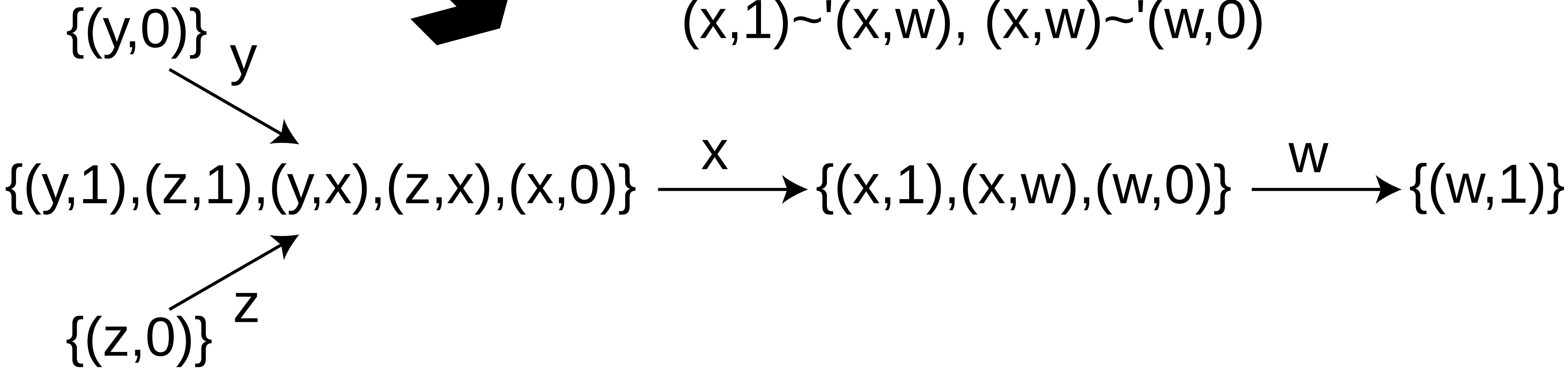
- $\mathcal{L}'A = O$.
- $\mathcal{L}'O = S/\sim'$.
  - $S = T \cup (O \times 2)$.
  - $T = \{(x, y) \in O \times O | \exists f \in A\ \partial_0 f = x, \partial_1 f = y\}$.
  - $\sim'$ は $(x, y)R'(z, w) \Leftrightarrow x = z$ or $y = w, (x, y)R'(z, 0) \Leftrightarrow y = z, (x, y)R'(z, 1) \Leftrightarrow x = z$ で生成される同値関係.
- $\partial_0^{\mathcal{L}'} x = [(x, 0)]_{\sim'}$, $\partial_1^{\mathcal{L}'} x = [(x, 1)]_{\sim'}$.





(y,1)~'(y,x), (z,1)~'(z,x), (y,x)~'(z,x),
(y,x)~'(x,0), (z,x)~'(x,0)

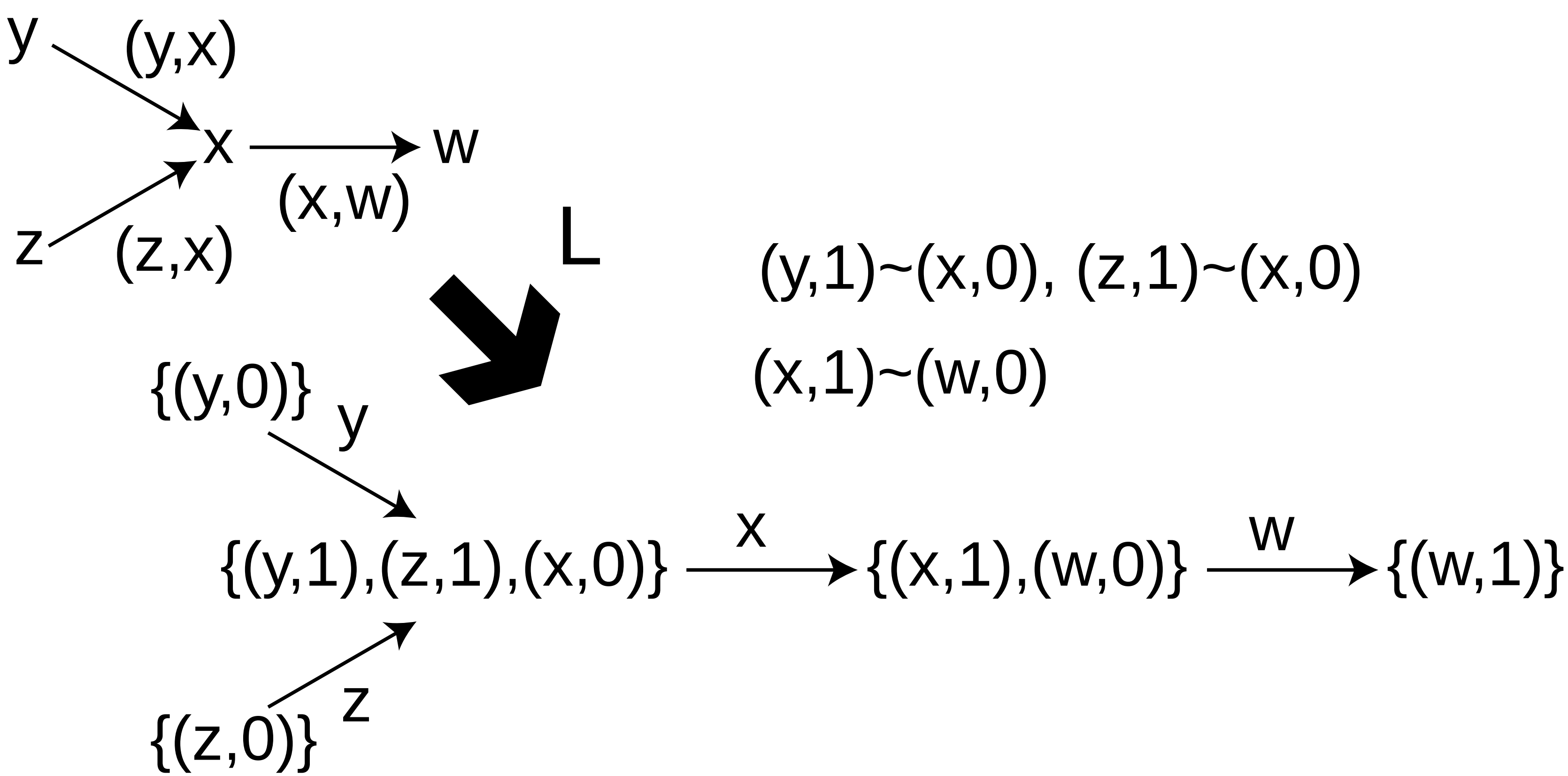
(x,1)~'(x,w), (x,w)~'(w,0)

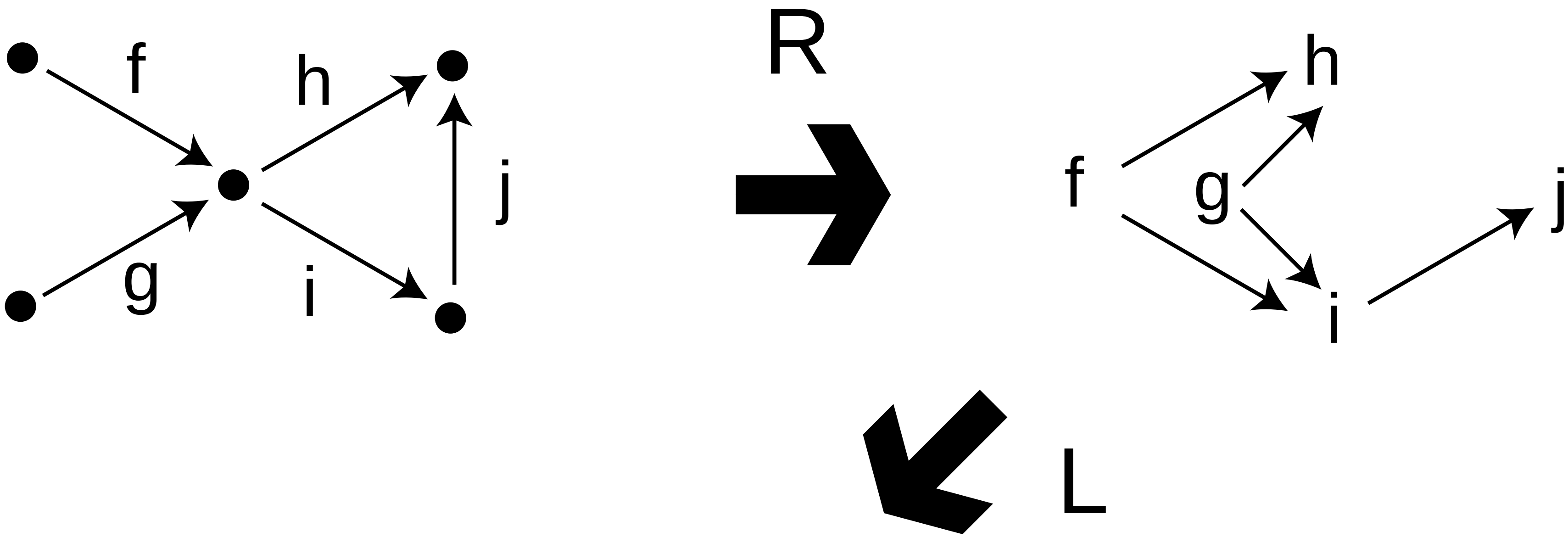


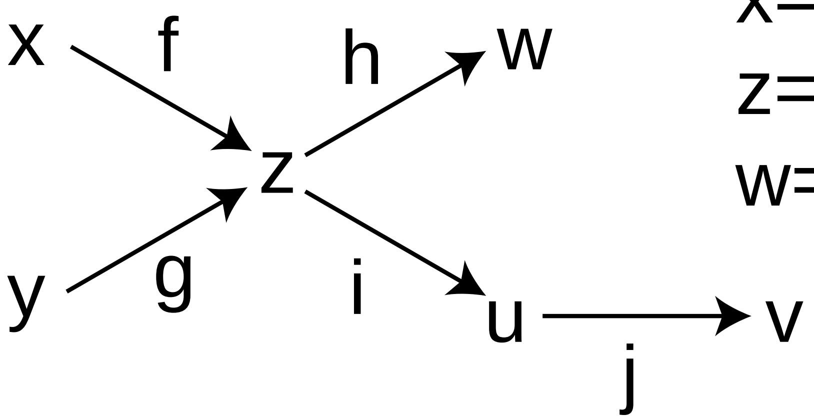
$\mathcal{R}$ の '逆'(最終版)

実は $\mathcal{L}'$ の T はいらない．$\mathcal{G}rph$ から自身への函手(gluing functor)$\mathcal{L}$ を $G = (A, O, \partial_0, \partial_1)$ に対して以下で定義する.

- $\mathcal{L}A = O$.
- $\mathcal{L}O = (O \times 2)/\sim$.
  - $\sim$ は $(x, 1)R(y, 0) \Leftrightarrow \exists f \in A\ \partial_0 f = x, \partial_1 f = y$ で生成される同値関係.
- $\partial_0^{\mathcal{L}} x = [(x, 0)]_\sim,\ \ \partial_1^{\mathcal{L}} x = [(x, 1)]_\sim$.


y
(y,x)
x
w
(x,w)
z
(z,x)
L
(y,1)~(x,0), (z,1)~(x,0)
(x,1)~(w,0)
{(y,0)}
y
{(y,1),(z,1),(x,0)}
x
{(x,1),(w,0)}
w
{(w,1)}
z
{(z,0)}





x={(f,0)}, y={(g,0)},
z={(f,1),(g,1),(h,0),(i,0)},
w={(h,1)}, u={(i,1),(j,0)}, v={(j,1)}

$\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{L}'$ の間の関係

- $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$ on $\mathcal{G}rph$.
  - これは $(x,1)R(y,0) \Leftrightarrow (x,1){R'}^{-1}(x,y)R'(y,0)$ による.
- $\mathcal{L} \dashv \mathcal{R}$ on $\mathcal{G}rph$. つまり，$\mathcal{G}rph(\mathcal{L}G, G') \simeq \mathcal{G}rph(G, \mathcal{R}G')$.
  - 対応は次ページと次々ページ.
  - 以下では unit $\eta : \mathcal{I} \to \mathcal{R}\mathcal{L}$ と counit $\epsilon : \mathcal{L}\mathcal{R} \to \mathcal{I}$ を調べる.

$$\varphi_{G,G'} : \mathcal{G}rph(\mathcal{L}G, G') \to \mathcal{G}rph(G, \mathcal{R}G')$$

$G = (A, O, \partial_0, \partial_1), G' = (A', O', \partial'_0, \partial'_1)$とする．有向グラフの準同型$D : \mathcal{L}G \to G'$が与えられたとする．$D_0 : \mathcal{L}O \to O'$と$D_A : \mathcal{L}A = O \to A'$がある．これから$\varphi_{G,G'}(D) : G \to \mathcal{R}G'$を構成したい．まず$\varphi_{G,G'}(D)_O := D_A : O \to \mathcal{R}O' = A'$とする．$\varphi_{G,G'}(D)_A : A \to \mathcal{R}A' = \{(f, g) \in A' \times A' | \partial'_1 f = \partial'_0 g\}$ は$f \in A$を$(D_A\partial_0 f, D_A\partial_1 f)$へと対応させる写像とする．$(D_A\partial_0 f, D_A\partial_1 f) \in \mathcal{R}A'$であることを確認するには$\partial'_1 D_A\partial_0 f = \partial'_0 D_A\partial_1 f$を示せばよい．これは$\partial'_1 D_A\partial_0 f = D_O\partial^{\mathcal{L}}_1\partial_0 f = D_0[(\partial_0 f, 1)]_\sim = D_0[(\partial_1 f, 0)]_\sim = D_0\partial^{\mathcal{L}}_0\partial_1 f = \partial'_0 D_A\partial_1 f$なのでよい．

$$\varphi^{-1}_{G,G'} : \mathcal{G}rph(G, \mathcal{R}G') \to \mathcal{G}rph(\mathcal{L}G, G')$$

逆に$\hat{D} : G \to \mathcal{R}G'$が与えられたときに次のようにして$\varphi^{-1}_{G,G'}(\hat{D}) : \mathcal{L}G \to G'$を構成する．いま$\hat{D}_O : O \to \mathcal{R}O = A'$と$\hat{D}_A : A \to \mathcal{R}A'$がある．まず$\varphi^{-1}_{G,G'}(\hat{D})_A := \hat{D}_O : \mathcal{L}A = O \to A'$とする．$\varphi^{-1}_{G,G'}(\hat{D})_O : \mathcal{L}O \to O'$は$\alpha \in \mathcal{L}O$に対して$\alpha$の代表元として$(x, 0)$の形のものがとれるときは$\partial'_1 \hat{D}_O x$を，$(y, 1)$の形のものがとれるときは$\partial'_0 \hat{D}_O y$を対応させる写像とする．これがwell-definedであることをみるには$(x, 1)R(y, 0)$のときに$\partial'_1 \hat{D}_O x = \partial'_0 \hat{D}_O y$であることを示せば十分．$(x, 1)R(y, 0)$とすると$\exists f \in A\ \partial_0 f = x, \partial_1 f = y$である．すると$\partial'_1 \hat{D}_O x = \partial'_1 \hat{D}_O \partial_0 f = \partial'_1 \partial^{\mathcal{R}}_0 \hat{D}_A f = \partial'_0 \partial^{\mathcal{R}}_1 \hat{D}_A f = \partial'_0 \hat{D}_O \partial_1 f = \partial'_0 \hat{D}_O y$となる．

unit $\eta : \mathcal{I} \to \mathcal{RL}$

$G = (A, O, \partial_0, \partial_1)$ に対して,

- $\mathcal{L}G = (\mathcal{L}A = O, \mathcal{L}O = (O \times 2)/\sim, \partial_0^{\mathcal{L}}, \partial_1^{\mathcal{L}})$ で $\partial_i^{\mathcal{L}} x = [(x, i)]_\sim$.
- $\mathcal{RL}G$ は以下のデータからなる.
  - $\mathcal{RL}A = \{(x, y) \in \mathcal{L}A \times \mathcal{L}A = O \times O | \partial_1^{\mathcal{L}} x = \partial_0^{\mathcal{L}} y$ i.e. $(x, 1) \sim (y, 0)\}$.
  - $\mathcal{RL}O = O$.
  - $\partial_0^{\mathcal{RL}}(x, y) = x, \partial_1^{\mathcal{RL}}(x, y) = y$.
- $\eta_G : G \to \mathcal{RL}G$ は $(\eta_G)_O = id_O : O \to \mathcal{RL}O = O$ と $(\eta_G)_A : A \to \mathcal{RL}A$ からなる. $(\eta_G)_A(f) = (\partial_0 f, \partial_1 f)$ である.

counit $\epsilon : \mathcal{LR} \to \mathcal{I}$

$G = (A, O, \partial_0, \partial_1)$ に対して,

- $\mathcal{R}G = (\mathcal{R}A = \{(f, g) \in A \times A | \partial_1 f = \partial_0 g\}, \mathcal{R}O = A, \partial_0^{\mathcal{R}}, \partial_1^{\mathcal{R}})$.
- $\mathcal{LR}G$ は以下のデータからなる.
  - $\mathcal{LR}A = \mathcal{R}O = A$.
  - $\mathcal{LR}O = (\mathcal{R}O \times 2)/\sim = (A \times 2)/\sim$.
  - $\partial_i^{\mathcal{LR}} f = [(f, i)]_\sim \ (i = 0, 1)$.
- $\epsilon_G : \mathcal{LR}G \to G$ は $(\epsilon_G)_A = id_A : \mathcal{LR}A = A \to A$ と $(\epsilon_G)_O : \mathcal{LR}O = (A \times 2)/\sim \to O$ からなる. $(\epsilon_G)_O$ は $(\epsilon_G)_O([(f, 0)]_\sim) = \partial_0 f, (\epsilon_G)_O([(f, 1)]_\sim) = \partial_1 f$ である. $(f, 1) R (g, 0) \Leftrightarrow \partial_1 f = \partial_0 g$ なので well-defined.

$\mathcal{RL}$と$\mathcal{LR}$で不変な構造

$\eta_G : G \simeq \mathcal{RL}G$, $\epsilon_G : \mathcal{LR}G \simeq G$となるための条件を求めよう.

補題1. $(\eta_G)_A$が全単射となるための必要十分条件は

(i-a) $f, g \in A$について$\partial_i f = \partial_i g$ $(i = 0, 1)$ならば$f = g$. つまり，各結節点間に有向辺は高々一つしかない.

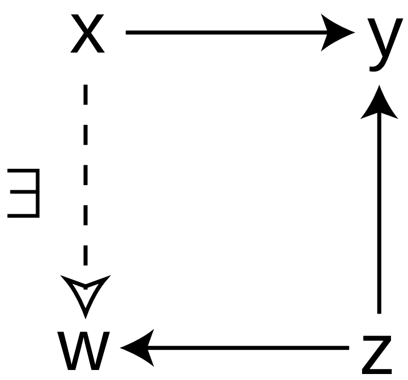
(i-b) $x \to y, z \to y, z \to w$ならば$x \to w$. ただし，$x$から$y$への有向辺があるとき$x \to y$と書いた.

補題2. $(\epsilon_G)_O$が全単射となるための必要十分条件は

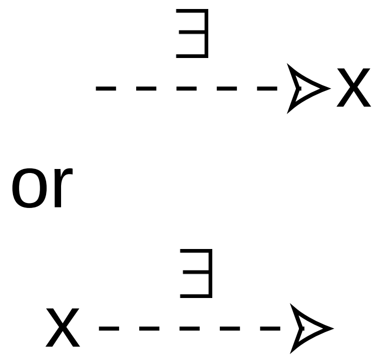
(ii-a) $\forall x \in O \exists f \in A\ \partial_0 f = x$ or $\partial_1 f = x$.

(ii-b) $\partial_i f = \partial_i g$かつ$f \neq g$ならば$\exists h \in A\ \partial_{i+1 \text{ mod } 2} h = \partial_i f (= \partial_i g)$.

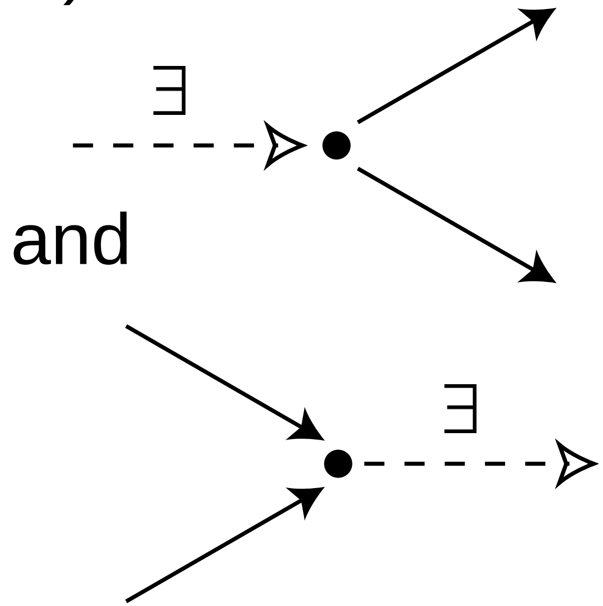
(i-b)



(ii-a)



(ii-b)



補題1.の証明 $(\eta_G)_A$ が単射 ⇔($(\eta_G)_A(f) = (\eta_G)_A(g)$ ならば $f = g$) ⇔($(\partial_0 f, \partial_1 f) = (\partial_0 g, \partial_1 g)$ ならば $f = g$) ⇔ 条件(i-a).

$(\eta_G)_A$ が全射であるとする．すると $(x,1) \sim (y,0)$ なる (x,y) に対して $(\eta_G)_A(f) = (x,y)$ なる $f \in A$ が存在する，つまり $x \to y$ でなければならない．例えば $x \to y, z \to y, z \to w$ のとき，$(x,1)R(y,0)R^{-1}(z,1)R(w,0)$ なので $(x,1) \sim (w,0)$ である．従って $x \to w$ でなければならない．これは条件(i-b)に他ならない．

逆に条件(i-b)が成り立つとする．$(\eta_G)_A$ が全射であることを示すには，$(x,y) \in \mathcal{RL}A$ に対して $(\eta_G)_A(f) = (x,y)$ なる $f \in A$ が存在することを示せばよい．つまり，$(x,1) \sim (y,0)$ のとき $x \to y$ であることをいう．$(x,1) \sim (y,0)$ とすると $\exists s_1, \cdots, s_n \in O \times 2, (x,1) = s_1, s_i R \cup R^{-1} s_{i+1}, s_n = (y,0)$ である．いま $s_1 = (x,1), s_n = (y,0)$ という形なので $s_1 R s_2 R^{-1} s_3 R \cdots R s_n$ である．例えば $n = 4$ のとき，$(x,1)R(x',0)R^{-1}(y',1)R(y,0)$，つまり $x \to x', y' \to x', y' \to y$ である．条件(i-b) より $x \to y$ となる．一般の場合は帰納法. $\square$

補題2.の証明 $(\epsilon_G)_O$ は有向辺をその始点か終点へと対応させるので，どの有向辺の始点にも終点にもなっていない結節点があれば全射ではない．従って $(\epsilon_G)_O$ が全射ならば条件(ii-a)が成り立つ．逆に条件(ii-a)が成り立てば $x \in O$ に対して $\exists f \in O, \partial_0 f = x$ なら $(\epsilon_G)_O([(f,0)]_\sim) = \partial_0 f = x$ となる．もう一方も同様．

条件 (ii-b) が成り立つとする．このとき $(\epsilon_G)_O$ は単射である．実際，$(\epsilon_G)_O([(f,0)]_\sim) = ((\epsilon_G)_O)([(g,0)]_\sim)$ とすると $\partial_0 f = \partial_0 g$ である．$f \neq g$ ならば $\partial_0 f = \partial_0 g = \partial_1 h$ なる $h \in A$ が存在する．すると $(f,0)R^{-1}(h,1)R(g,0)$ なので $(f,0) \sim (g,0)$，つまり $[(f,0)]_\sim = [(g,0)]_\sim$ である．また，$(\epsilon_G)_O([(f,1)]_\sim) = (\epsilon_G)_O([(g,1)]_\sim)$ の場合は同様にできて $(\epsilon_G)_O([(f,1)]_\sim) = (\epsilon_G)_O([(g,0)]_\sim)$ の場合は $\partial_0 f = \partial_1 g \Leftrightarrow (g,1)R(f,0)$ なのでよい．従って $(\epsilon_G)_O$ は単射である．

逆に $(\epsilon_G)_O$ が単射とすると例えば $(\epsilon_G)_O([(f,0)]_\sim) = (\epsilon_G)_O([(g,0)]_\sim)$ つまり $\partial_0 f = \partial_0 g$ のとき $(f,0) \sim (g,0)$ であるから $f \neq g$ ならば $\exists s_1, \cdots, s_n \in A \times 2, (f,0) = s_1 R^{-1} s_2 R \cdots R s_n = (g,0)$ である．$n = 3$

の場合を考えると $(f,0)R^{-1}(h,1)R(g,0)$ である．つまり $\partial_0 f = \partial_1 h = \partial_0 g$ となる．これは条件(ii-b)の $i=0$ の場合である．n が一般の場合でもこの条件は出てくる．$i=1$ の場合は $(\epsilon_G)_O([(f,1)]_\sim) = (\epsilon_G)_O([(g,1)]_\sim)$ を考えると出てくる． $\square$

補題1. と補題2. より以下の定理を得る．

定理1. 条件(i-a),(i-b)を満たす有向グラフの全体のなす $\mathcal{G}rph$ の部分圏は $\eta : \mathcal{I} \to \mathcal{RL}$ を自然同型とする最大の部分圏である．また条件(ii-a),(ii-b)を満たす有向グラフの全体のなす $\mathcal{G}rph$ の部分圏は $\epsilon : \mathcal{LR} \to \mathcal{I}$ を自然同型とする最大の部分圏である．

函手としての機能の貼り合せ:(II) の方向，$\mathcal{L}''$ 再考

- $\mathcal{G}rph$ の部分圏 $\mathcal{H}$ を以下で定義する.
  - $\mathcal{H}$ の対象は有向グラフ $G = (A, O, \partial_0, \partial_1)$ で $\forall x \in O \exists f, g \in A, \partial_1 f = x = \partial_0 g$ を満たすもの.
  - $\mathcal{H}$ の射は有向グラフの準同型.

- $\mathcal{H}$ の対象の条件は $\mathcal{L}'O$ のどの同値類にも T の元((x, y) の形のもの)が入るための必要十分条件.

- $\mathcal{L}''$ は $\mathcal{H}$ 上で函手となり $\mathcal{L}'' \simeq \mathcal{L}$ on $\mathcal{H}$. さらに $\mathcal{L}''(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ である.
  - 後半を示す. $[(x, y)]_{\sim''} \in \mathcal{L}''O$ に対して $\partial_0 f = x, \partial_1 f = y$ となる $f \in A$ がある. このとき $\partial_1^{\mathcal{L}''} x = [(x, y)]_{\sim''} = \partial_0^{\mathcal{L}''} y$ なのでよい.

- $\mathcal{R}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$である．
  - $f \in \mathcal{R}O = A$をとる．$\partial_0 f = \partial_1 g$なる$g$と$\partial_1 f = \partial_0 h$なる$h$が存在する．すると$(g, f), (f, h) \in \mathcal{R}A$で$\partial_1^{\mathcal{R}}(g, f) = f = \partial_0^{\mathcal{R}}(f, h)$となるのでよい．

- 以上から$\mathcal{L}'' \dashv \mathcal{R}$ on $\mathcal{H}$.

- 部分圏$\mathcal{H}$では条件(ii-a),(ii-b)は自動的に満たされるので$\epsilon_G : \mathcal{L}''\mathcal{R}G \simeq G$となる．

- $\mathcal{H}$の対象Gに対して$\eta_G : G \simeq \mathcal{R}\mathcal{L}''G$となるための必要十分条件は先と同様に条件(i-a),(i-b)が成り立つことである．

以上をまとめて次の定理を得る．

定理 2. $\epsilon : \mathcal{L}''\mathcal{R} \to \mathcal{I}$ は $\mathcal{H}$ 上で自然同型である．また $\eta : \mathcal{I} \to \mathcal{R}\mathcal{L}''$ を自然同型とする $\mathcal{H}$ の最大の部分圏は条件 (i-a)，(i-b) を満たす有向グラフの全体のなす圏である.

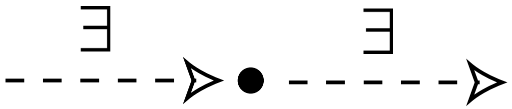
部分圏$\mathcal{H}$と条件(i-a), (i-b)の意味

- $\mathcal{H}$の定義の条件は有向グラフが前方及び後方への矢印の追跡で閉じているという条件$\Rightarrow$有限グラフなら必ずcycleが存在する.

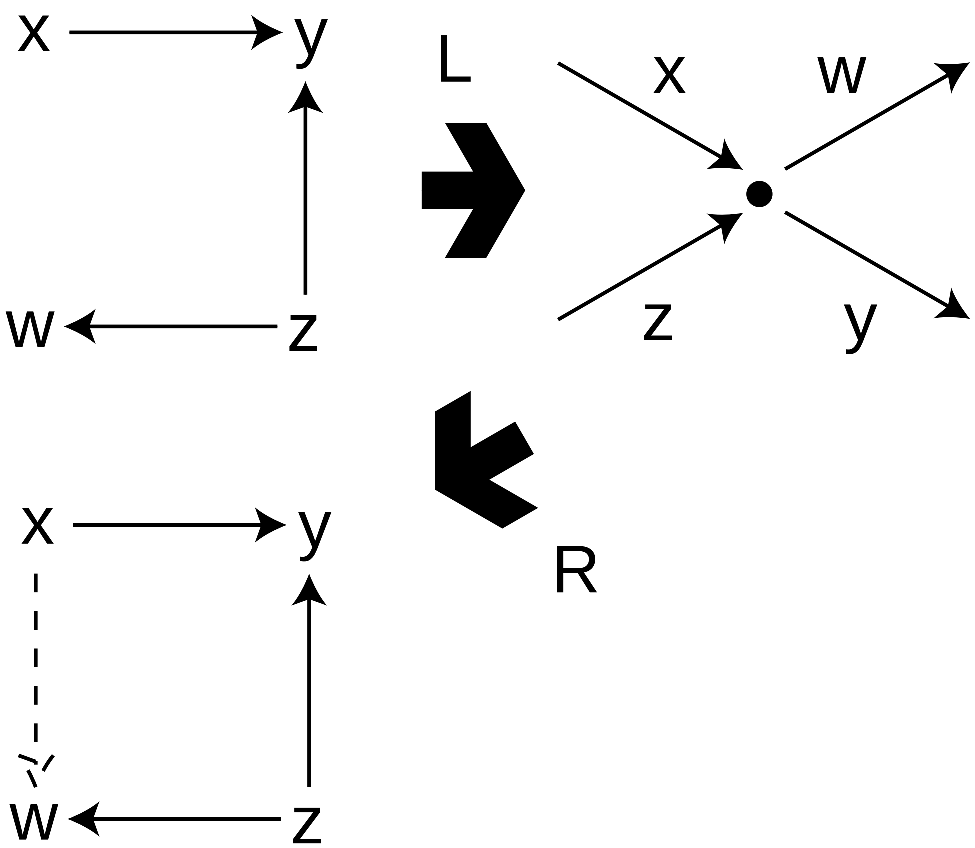
- 条件(i-a), (i-b)は有向グラフがある有向グラフのline-graphであるための必要十分条件(Pultr, 1979).

- 条件 (i-b) は結節点を有向辺にして考えればこれは自明な貼り合せ(gluing)の条件.

cycle



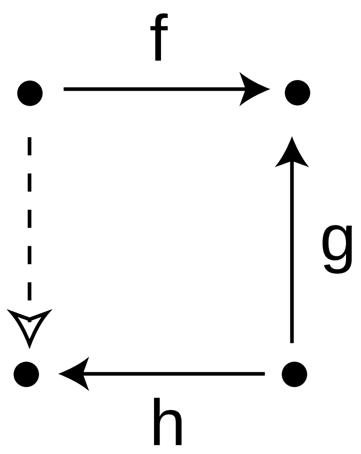
gluing



Anticipationとしての条件(i-b)

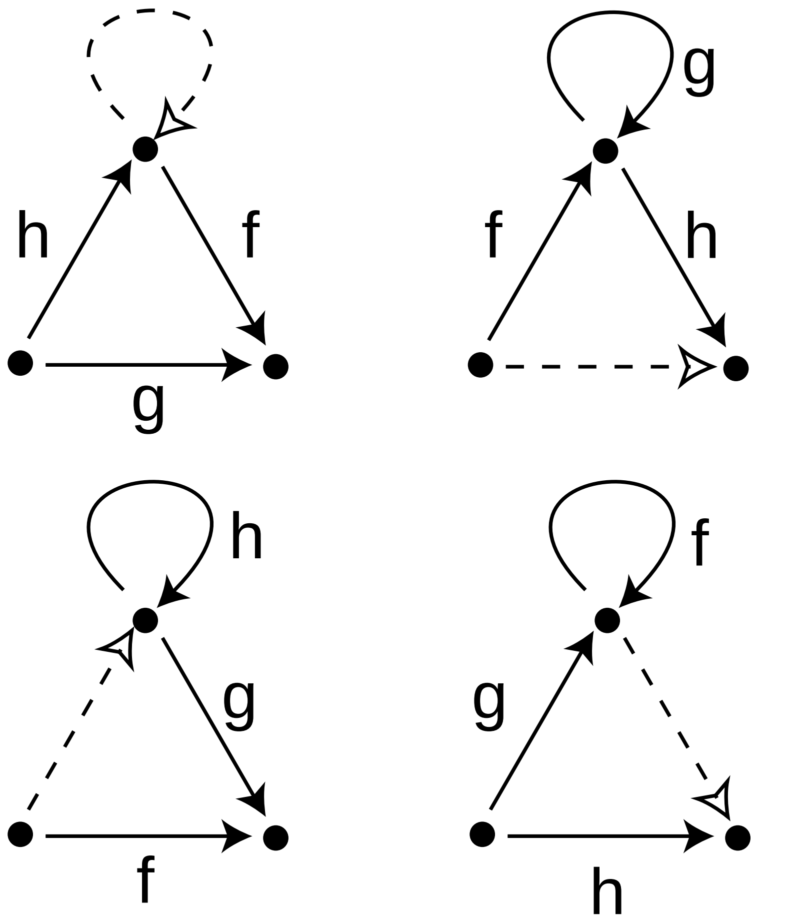
- しかし，条件(i-b)のどれか一つの有向辺をつぶすと矢印($x \to y$)の推移性に関するanticipationだと考えられないか.
  - 次ページの右上は，例えば,「ソクラテス$\to$人間」「人間$\to$死ぬ」から「ソクラテス$\to$死ぬ」を導くとき通常は一つ目の命題の「人間」と二つ目の命題の「人間」は同じであることが前提とされるが，条件(i-b)では二つの「人間」が同じであることを$\to$を用いて表したと考えられる「人間$\to$人間」が無ければ「ソクラテス$\to$死ぬ」は出てこないことを表す図と思えそう.
  - 左上は三角があるときhの帰結とfの前提が同じであることを推測する図.
  - 左下はhがあることでgの前提が何かの帰結でもあることを期待してfがgで説明できることを推測する図(右下も同様).

anticipation



collapsing
an adjacent
pair of nodes

irreflexive deduction



irreflexive abductions

$\mathcal{G}rph \to 2\mathcal{G}rph$ としての Line-graph

Γ を以下の図式で表される圏とする．

$$C_2 \overset{s_1}{\underset{t_1}{\leftleftarrows}} C_1 \overset{s_0}{\underset{t_0}{\leftleftarrows}} C_0$$

二次元有向グラフの圏とは $2\mathcal{G}rph := \mathcal{S}ets^{\Gamma^{op}}$ のこととする．さて，函手 $\mathcal{R} : \mathcal{G}rph \to 2\mathcal{G}rph$ を，$G = A_1 \overset{\partial_{0,0}}{\underset{\partial_{0,1}}{\rightrightarrows}} A_0$ を

$$\mathcal{R}G \quad = \quad \{(f,g) \in A_1 \times A_1 | \partial_{0,1} f = \partial_{0,0} g\} \overset{\partial^{\mathcal{R}}_{1,0}}{\underset{\partial^{\mathcal{R}}_{1,1}}{\rightrightarrows}} A_1 \overset{\partial^{\mathcal{R}}_{0,0}}{\underset{\partial^{\mathcal{R}}_{0,1}}{\rightrightarrows}} A_0$$

へと対応させる函手とする．ただし $\partial^{\mathcal{R}}_{1,0}(f,g) = f, \partial^{\mathcal{R}}_{1,1}(f,g) = g, \partial^{\mathcal{R}}_{0,i} = \partial_{0,i}$ $(i = 0, 1)$.

関手 $\mathcal{L} : 2\mathcal{G}rph \to \mathcal{G}rph$ は $G = A_2 \underset{\partial_{1,1}}{\overset{\partial_{1,0}}{\rightrightarrows}} A_1 \underset{\partial_{0,1}}{\overset{\partial_{0,0}}{\rightrightarrows}} A_0$ を

$$A_1 \underset{\partial^{\mathcal{L}}_{0,1}}{\overset{\partial^{\mathcal{L}}_{0,0}}{\rightrightarrows}} A_0/\sim$$

へと対応させる関手とする．ただし $\sim$ は $xRy \Leftrightarrow \exists\alpha \in A_2\ \exists f, g \in A_1\ \partial_{1,0}\alpha = f, \partial_{1,1}\alpha = g, \partial_{0,1}f = x, \partial_{0,0}g = y$ によって生成される A_0 上の同値関係．また $\partial^{\mathcal{L}}_{0,i}f = [\partial_{0,i}f]_\sim$ とする．

- $\mathcal{G}rph(\mathcal{L}G, G') \simeq 2\mathcal{G}rph(G, \mathcal{R}G')$ である．
  - 対応は次ページと次々ページ．

$$\varphi_{G,G'} : \mathcal{G}rph(\mathcal{L}G, G') \to 2\mathcal{G}rph(G, \mathcal{R}G')$$

$G = A_2 \underset{\partial_{1,1}}{\overset{\partial_{1,0}}{\rightrightarrows}} A_1 \underset{\partial_{0,1}}{\overset{\partial_{0,0}}{\rightrightarrows}} A_0$，$G' = A'_1 \underset{\partial'_{0,1}}{\overset{\partial'_{0,0}}{\rightrightarrows}} A'_0$ とする．$D : \mathcal{L}G \to G'$ が与えられたとする．$D_1 : A_1 \to A'_1$ と $D_0 : A_0/\sim \to A'_0$ がある．まず $\varphi_{G,G'}(D)_1 := D_1 : A_1 \to A'_1$ とする．$\varphi_{G,G'}(D)_0 : A_1 \to A_1$ は $\varphi_{G,G'}(D)_0(x) := D_0([x]_\sim)$ とする．$\varphi_{G,G'}(D)_2 : A_2 \to \{(f,g) \in A'_1 \times A'_1 | \partial'_{0,1}f = \partial'_{0,0}g\}$ は次のように構成する．$\alpha \in A_2$ に対して $(\partial_{1,0}\alpha, \partial_{1,1}\alpha) \in A_1 \times A_1$ である．すると $(D_1\partial_{1,0}\alpha, D_1\partial_{1,1}\alpha) \in A'_1 \times A'_1$ となる．$\varphi_{G,G'}(D)_2$ はこの対応による写像とする．$\partial'_{0,1}D_1\partial_{1,0}\alpha = \partial'_{0,0}D_1\partial_{1,1}\alpha$ であることは次のようにして分かる．$\partial'_{0,1}D_1\partial_{1,0}\alpha = D_0\partial^{\mathcal{L}}_{0,1}\partial_{1,0}\alpha = D_0([\partial_{0,1}\partial_{1,0}\alpha]_\sim)$ である一方，$\partial'_{0,0}D_1\partial_{1,1}\alpha = D_0\partial^{\mathcal{L}}_{0,0}\partial_{1,1}\alpha = D_0([\partial_{0,0}\partial_{1,1}\alpha]_\sim)$ である．ここで，$\partial_{0,1}\partial_{1,0}\alpha R \partial_{0,0}\partial_{1,1}\alpha$ であったから両者は一致する．

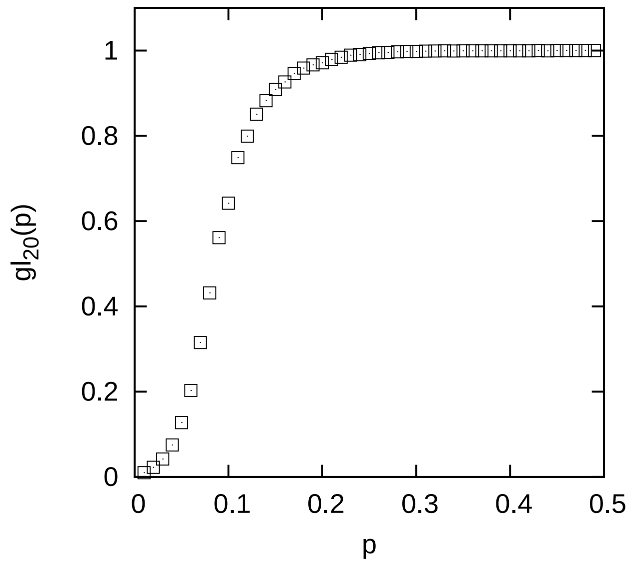
$$\varphi^{-1}_{G,G'} : 2\mathcal{G}rph(G, \mathcal{R}G') \to \mathcal{G}rph(\mathcal{L}G, G')$$

逆に $\hat{D} : G \to \mathcal{R}G'$ が与えられたとする．$\hat{D}_2 : A_2 \to \{(f,g) \in A'_1 \times A'_1 | \partial'_{0,1}f = \partial'_{0,0}g\}$，$\hat{D}_1 : A_1 \to A'_1$ 及び $\hat{D}_0 : A_0 \to A'_0$ がある．まず $\varphi^{-1}_{G,G'}(\hat{D})_1 := D_1 : A_1 \to A'_1$ とする．$\varphi^{-1}_{G,G'}(\hat{D})_0 : A_0/\sim \to A'_0$ は $x \in A_0$ に対して $\varphi^{-1}_{G,G'}(\hat{D})_0([x]_\sim) := \hat{D}_0(x)$ で定義する．これが well-defined であることをみる．xRy のとき $\hat{D}_0(x) = \hat{D}_0(y)$ となることを示せば十分．xRy とすると $\exists\alpha \in A_2\ \exists f, g \in A_1\ \partial_{1,0}\alpha = f, \partial_{1,1}\alpha = g, \partial_{0,1}f = x, \partial_{0,0}g = y$ である．すると $\hat{D}_0(x) = \hat{D}_0\partial_{0,1}f = \partial'_{0,1}\hat{D}_1 f = \partial'_{0,1}\hat{D}_1\partial_{1,0}\alpha = \partial'_{0,1}\partial^{\mathcal{R}}_{1,0}\hat{D}_2\alpha$ である一方，$\hat{D}_0(y) = \hat{D}_0\partial_{0,0}g = \partial'_{0,0}\hat{D}_1 g = \partial'_{0,0}\hat{D}_1\partial_{1,1}\alpha = \partial'_{0,0}\partial^{\mathcal{R}}_{1,1}\hat{D}_2\alpha$ であるが $\hat{D}_2$ の行き先の定義からこれらは等しくなくてはいけない．

まとめと今後の展望

- 対象の機能への分解と機能の貼り合せは随伴の関係にある．
- 分解と貼り合せで不変な構造：cycle の存在と anticipation．
- 今後の展望
  - random graph で ‘gluing closure’ の性質を調べる．
  - Paton の idea の数学的定式化：$\mathcal{G}rph$ 上の形式概念解析．

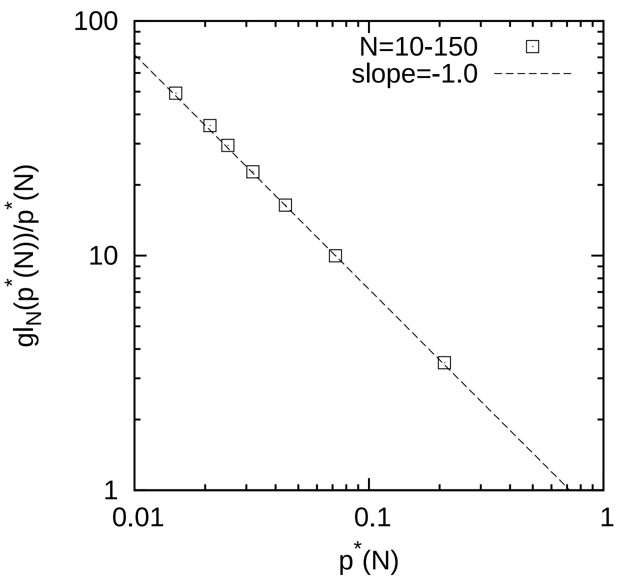
Random graphのgluing closure



- X : N 個の元からなる有限集合.
- R_p : $(x, y) \in R_p$ である確率が p であるような X 上のランダムな二項関係.
- R'_p : $X \times 2$ 上の二項関係で $(x, 1)R'_p(y, 0) \Leftrightarrow xR_py$.
- R'_p で生成される $X \times 2$ 上の同値関係を $\sim$ として,

$$\begin{aligned} \overline{R_p} &= \{(x, y) \in X \times X | (x, 1) \sim (y, 0)\} \\ gl_N(p) &= \mathbf{E}(\#\overline{R_p})/N^2 \end{aligned}$$

とする.



- gluing closureは機能を貼り合わせて分解する操作.

- 張り合せて分解することでもとのグラフでは隠れていた辺(機能)が顕在化する.

- $gl_N(p)/p$： 単位辺あたりの増分．いつ最大になるか？

- $p^*(N)$： $gl_N(p)/p$を最大にするpとする.

- $N = 150$までは

$$gl_N(p^*(N))/p^*(N) \propto p^*(N)^{-1}$$

が成り立っていそう．$N \to \infty$では？

References

[1] Paton, R. (2002). Process, structure and context in relation to integrative biology. *BioSystems* 64, 63-72.

[2] Pultr, A. (1979). On linear representations of graphs. *Fundamentals of computation theory(Proc. Conf. Algebraic, Arith. and Categorical Methods in Comput. Theory, Berlin/Wendisch-Riets, 1979)* pp.362-369, Math. Res., 2, Akademie-Verlag, Berlin.

[3] Rosen, R. (1958a). A relational theory of biological systems. *Bulletin of Mathematical Biophysics* 20, 245-260.

[4] Rosen, R. (1958b). The representation of biological systems from the standpoint of the theory of categories. *Bulletin of Mathematical Biophysics* 20, 317-341.

[5] Rosen, R. (1959). A relational theory of biological systems II. *Bulletin of Mathematical Biophysics* 21, 109-128.

[6] Rosen, R. (1985). *Anticipatory Systems: Philosophical, Mathematical and Methodological Foundations.* Pergamon Press. Excerpts are available at http://www.rosen-enterprises.com/RobertRosen/Page1to32AnticipatorySystems.pdf , http://www.rosen-enterprises.com/RobertRosen/EncodingsOfTimefromAS.pdf and http://www.rosen-enterprises.com/RobertRosen/Ch6and7fromAS.pdf

[7] Rosen, R. (1991). *Life Itself: A Comprehensive Inquiry into the Nature, Origin, and Fabrication of Life.* Columbia University Press, New York.