基本資料

- http://ac-net.org/tjst/12/koube-2012.html
- http://arxiv.org/abs/1204.2193v2

目 次

2012.6.21 (6.23 updated) 辻下　徹

第 I 部

６月１４日

cf: http://ac-net.org/tjst/12/koube-120613.html

1 序

2 基礎

3 連続体と位相

第 II 部

６月２１日

復習

1. 自然数
   - $\boxed{1}$ 到達可能性
   - $\boxed{2}$ **砂山の公理.** 到達不能数がある
   - $\boxed{3}$ 記号. $\forall^{acc}$,$\forall^{huge}$,$\exists^{acc}$,$\exists^{huge}$
2. 有理数
   - $\boxed{4}$ 無限小. $r \approx 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall^{acc}k.|r| < \frac{1}{k}$.
     - 識別不能性：$r \approx s \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall^{acc}k.|r-s| < \frac{1}{k}$.
   - $\boxed{5}$ 有界. $|r| < \infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists^{acc}k.|r| < k$.
   - $\boxed{6}$ $r_i \approx s_i$ ならば $r_1 + r_2 \approx s_1 + s_2$
   - $\boxed{7}$ 識別可能な順序：$r \prec s \overset{def}{\Longleftrightarrow} r < s$ かつ $r \not\approx s$.
3. 集合論
   - $\boxed{8}$ クラス: 要素が同じかどうか決定可能なもの.
   - $\boxed{9}$ 集合：有限列挙可能なクラス. 個数が定義できる。

- プロパクラス：集合ではないクラス（例：$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$）

$\boxed{10}$ 半集合：集合の部分クラス

- 部分クラス：$B \subset A$. ($\forall x \in B.x \in A$ が証明できるもの)
- プロパ半集合: 集合の部分クラスで集合ではないもの
- **半集合 B の環境集合**: B を含む集合。 環境集合の交わりも環境集合である。

$\boxed{11}$ 条件の分類

- 確定条件 (Δ_0)：量化が有界: $\forall x \in y, \exists x \in y$
- 条件が客観的 $\overset{def}{\iff}$ 到達可能性を使わずに定義可能
  - クラス A 上の確定条件 P は部分クラス $\left\{ x \in A \;\middle|\; P(x) \right\}$ を定める。
  - 注意. $\forall^{acc} x.P(x)$ は主観的確定的条件.
    $\because$ $\Omega \gg 1$ を一つとると $\forall^{acc} x.P(x) \Leftrightarrow \forall x \leq \Omega.P(x)$
- **公理**. 集合上の客観的確定条件は部分集合を定める。
- 集合上の主観的条件は一般にはプロパ半集合を定める。

$\boxed{12}$ **溢出原理**：半集合で成り立つ客観的確定条件は、ある環境集合で成り立つ。

$\boxed{13}$ 定理. $\mathbb{N}_{acc} \subset A \subset [0..\Omega]$ となる集合 A は、ある $M \gg 1$ について $[1..M] \subset A$ を満たす。

- 証明. $n \in [0..\Omega]$ についての条件 $[0..n] \subset A$ は客観的で、すべての到達可能数を含むので、ある $M \gg 1$ を含む。 ∎

$\boxed{14}$ 系. 部分集合 $A \subset [1..\Omega]$ が、$\exists^{huge} M \forall^{huge} N \leq M.N \in A$ を満たせば、$\exists^{acc} \ell.[\ell, M] \subset A$.

- 証明. 背理法. $\forall^{acc} \ell \exists^{acc} p > \ell.p \notin A$ とする。このとき、$\forall^{acc} \ell \exists p \in [\ell, M].p \notin A$ となる. 溢出定理より $\exists^{huge} L \exists p \in [L, M].p \notin A$ となり矛盾.

$\boxed{15}$ 系. 集合 A について、(1)$\forall^{acc} k.\exists^{acc} \ell > k.\ell \in A \Leftrightarrow$ (2)$\forall^{huge} M.\exists^{huge} I \leq M.I \in A$ とは同値.

証明. (1) とし、$M \gg 1$ とする。$\exists i \in [k, M]$ という条件はすべての $k \in \mathbb{N}_{acc}$ について成り立つので、到達不能な I についても成り立ち、$I \leq M$ かつ $I \in A$ となる I がある。逆に (2) とする。$k \in \mathbb{N}_{acc}$ に対し、$\exists i \in [k, x].i \in A$ という条件は、任意の到達不能数 x について成り立つので、ある $x \in \mathbb{N}_{acc}$ についても成り立つ。∎

4. クラスからクラスへの関数 (Function)

$\boxed{16}$ $f : A \to B$. 客観的確定条件 $R(x, y)$ で定義されたもので、関数性

$$\forall a \in A.\exists^! b \in f[a].R(a, b)$$

が証明できるもの。ただし部分集合 $f[a] \subset B$ は a に対する f の**候補集合**.

$\boxed{17}$ 合成. $f : A \to B, g : B \to C$ とし、$S(x, y)$ が g を定義する客観的確定条件とする。

$$T(a, c) := \exists b \in f[a].R(a, b) \;\&\; S(b, c)$$

と定義すると、T も確定的であり、

$$h[a] = \bigcup_{b \in f[a]} g[b]$$

とおけば、

$$\forall a \in A. \exists^! c \in h[a]. T(a, c)$$

が示される。

$\boxed{18}$ **拡張公理**. 半集合で定義された集合値な関数は、ある環境集合に拡張される。拡張は本質的に一意的、すなわち、$f_i : a_i \to b \ (i = 1,\ 2)$ が拡張のとき、$a_1 \bigcap a_2$ 上で $f_1 = f_2$.

$\boxed{19}$ **定理.** $\mathbb{N}_{acc}$ から集合への関数は、ある $N \gg 1$ について $[1..N] \to B$ に拡張される。

5. 帰納法

$\boxed{20}$ **公理（強帰納法）**：客観的確定条件 $P(x)$ が帰納的ならば $\forall x \in \mathbb{N}.P(x)$.

$\boxed{21}$ **公理（弱帰納法）**：弱帰納的な確定条件 $P(x)$ は次を満たす：

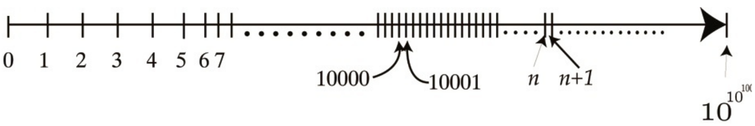
$$\forall^{acc} x.P(x)$$

ただし弱帰納的とは、$P(0)$ かつ $\forall^{acc} x(P(x) \to P(x+1))$.

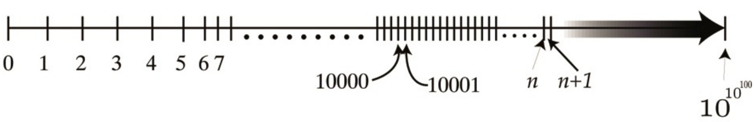
$\boxed{22}$ 系. 原始再帰的関数は到達可能数で定義され値も到達可能数となる。

6. イメージ

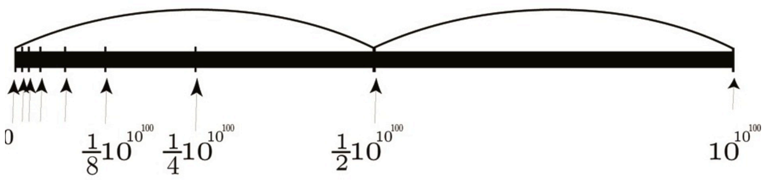
$\boxed{23}$ 論理的心象



$\boxed{24}$ 0 から見た心象



$\boxed{25}$ 全体を見た心象



7. 寓話.

$\boxed{26}$ ガニメデ人は $\Omega \gg 1$ も確定でき、Ω ステップの作業を実行できる。

- ガニメデ人にとっても確定できない数は存在 (地球人とガニメデ人は同等)

$\boxed{27}$ 地球人は $\{\frac{1}{\Omega}, \cdots, \frac{\Omega}{\Omega}\}$ 全体と個々の数とを同時に認識できないが、ガニメデ人には双方を同時に認識できる。

$\boxed{28}$ 地球人にとって明確な主観的条件（確定可能性, $x \approx 0$ など）はガニメデ人には不定性をもつ条件となる. 例：

- （溢出定理）$A \subset \{1, \cdots, \Omega\}$ が確定可能数をすべて含むと到達不能数も含む。

$\boxed{29}$ $a \approx b$ のとき地球人には a, b の違いが見えないがガニメデ人には違いがわかる。地球人にとって同じに見える a, b の範囲がガニメデ人には不定に見える。

$\boxed{30}$ 地球人は $A \approx B$ のとき部分 A, B の違いがわからない。

$\boxed{31}$ ガニメデ人も主観的連続理論を形成するが、不定性を含めて地球人の連続体理論と同型になる。

$\boxed{32}$ 主観的連続数学は客観的だが、その客観的対応物は地球人とガニメデ人とでは違う。

		ガニメデ人の認識	地球人の認識
1	(不定にみえる)	Ω 程度は到達可能	$\Omega \in \mathbb{N}$ が到達不能
2	(不定にみえる)	巨大数列の一部	無限数列 $(a_i)_{i=1,2,3,\cdots}$
3	(不定にみえる)	$\mathbb{Q}$ の元はすべて有限	$r \in \mathbb{Q}$ が無限
4	(不定にみえる)	$\frac{M}{\Omega}$ はすべて有理数	k, ℓ が到達可能なとき $\frac{k}{\ell}$ は有理数
5	(不定にみえる)	$\{\frac{1}{\Omega}, \cdots, \frac{\Omega}{\Omega}\}$	単位区間 $[0,1]$
6	(不定にみえる)	$x \neq y$	$x \approx y$
7	(不定にみえる)	トークンの集まり	1 点
8	(不定にみえる)	$A \neq B$	$A \approx B$：識別不能
9	(不定にみえる)	$\{\frac{1}{\Omega}, \cdots, \frac{\Omega}{\Omega}\}$ の部分集合の集まり	$A \subset [0,1]$
10	(不定にみえる)	どの 2 点も Sorites 列で結ばれる	連結
11		理解不能	開集合

8. 連続体

$\boxed{33}$ $\approx$ が弱同値関係 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 反射的・対称的・推移的

- 命題. $x_1, \cdots, x_n$ が $\approx$ 鎖のとき $\forall^{acc} k \leq n. x_1 \approx x_k$.
  $\approx$ が客観的ならば、$\forall k \leq n :\Rightarrow x_1 \approx x_n$.

$\boxed{34}$ 連続体：$C = (|C|, \approx)$ ($|C|$ はクラス、$\approx$ は同値関係) $(\mathbb{Q}, \approx)$.

- 網連続体：$|C|$ が半集合, $((-\infty, \infty)_\varepsilon$,$(0,1)_\varepsilon$ など)
- 剛網連続体：$|C|$ が集合. $([0,1]_\varepsilon)$

9. 連続体の射 $F : C \to D$

$\boxed{35}$ $f : |C| \to |D|$ 連続 $\overset{def}{\iff} x \approx y \Rightarrow f(x) \approx f(x)$.

$\boxed{36}$ $f \approx g \overset{def}{\iff} \forall x \in |C|.f(x) \approx g(x)$.

- C **から** D **への射**は f の「$\approx$ 同値類」

$\boxed{37}$ 連続体の同型. $C \simeq D \overset{def}{\iff} \exists f : C \to D, \exists g : D \to C$ such $g \circ f \approx id_C$, $f \circ g \approx id_D$.

$\boxed{38}$ 例: $(\mathbb{Q}, \approx) \simeq (\varepsilon\mathbb{Z}, \approx)$, $[0,1] \approx ([0,1]_\varepsilon, \approx)$.

10. 距離連続体の位相

$\boxed{39}$ 点列 $\mathbb{N}_{acc} \to X$ (X は集合) は、有限点列 $[1..M] \to X$ に拡張できる。

$\boxed{40}$ 剛網連続体上の点列 $(a_1, a_2, \cdots)$ が収束 $\overset{def}{\iff} \exists c \forall^{acc} k \exists^{acc} \ell . \forall i > \ell \left[d(c, a_i) < \frac{1}{k} \right]$.

$\boxed{41}$ これは拡張有限点列の収束と同値： $\exists^{huge} M \forall^{huge} I, J < M (a_I \approx a_J)$.

$\boxed{42}$ Robinson の補題. $\forall^{acc} i.a_i \approx b_i$ ならば $\exists^{huge} M \forall I \leq M \ [\ a_I \approx b_I\ ]$.

- 証明. $\forall^{acc} i.d(a_i, b_i) < \frac{1}{i}$ に溢出定理を適用し $\exists^{huge} I \forall i \leq I \left[d(a_i, b_i) < \frac{1}{i} \right]$. 従って、$1 \ll J \leq I$ についても、$a_J \approx b_J$. ∎

$\boxed{43}$ C がコンパクト $\overset{def}{\iff}$ 任意の $N \gg 1$ について、個数が N 以下の稠密な部分集合を持つ。

$\boxed{44}$ 距離連続体 C が**プレコンパクト** $\overset{def}{\iff}$ 任意の $k \in \mathbb{N}_{acc}$ に対し、$\ell \in \mathbb{N}_{acc}$ 個の要素を持つ部分集合 $X \subset |C|$ があり、

$$|C| = \bigcup_{x \in X} B_{\frac{1}{k}}(x).$$

$\boxed{45}$ 定理. 距離剛網連続体については、コンパクト性とプレコンパクト性は同値。

$\boxed{46}$ 系. コンパクト距離剛網連続体の部分集合が定める連続体はコンパクト.

11. まとめ

$\boxed{47}$ 砂山公理. プロパクラス $\mathbb{N} \supset$ 集合 $[1..\Omega] \sqsupset$ 半集合 $\mathbb{N}_{acc}$

$\boxed{48}$ 条件が確定的: 量化が $\forall x \in y$,$\exists x \in y$ のみ.

$\boxed{49}$ 条件が客観的: 到達可能性を使わずに定義可能.

$\boxed{50}$ 分離公理. 客観的な確定条件は集合内で部分集合を定める。

$\boxed{51}$ 溢出定理. $\mathbb{N}_{acc}$ を含む集合 A に対し、$\exists^{huge} M.[1..M] \subset A$.

$\boxed{52}$ ヴァリエーション (1)
$\exists^{acc} k \exists^{huge} M.[k, M] \subset A$ という条件は、次のいずれの条件とも同値.

- $\exists^{acc} k . \forall^{acc} \ell \geq k . \ell \in A$,
- $\exists^{huge} K . \forall^{huge} L \leq K . L \in A$.

$\boxed{53}$ ヴァリエーション (2)：
$\forall^{acc} k \forall^{huge} M.[k, M] \bigcap A \neq \emptyset$ は次のいずれの条件とも同値：

- $\forall^{acc}k.\exists^{acc}\ell \geq k.\ell \in A$,
- $\forall^{huge}K.\exists^{huge}L \leq K.L \in A$.

$\boxed{54}$ 拡張公理. 半集合から集合への関数は、環境集合に拡張できる。

$\boxed{55}$ 強帰納法公理. 帰納的な客観的確定条件は、すべての数について成り立つ。

$\boxed{56}$ 弱帰納法公理. 弱帰納的な確定条件は、すべての到達可能数について成り立つ。

$\boxed{57}$ Robinson の補題[1]. 距離連続体において、$\forall^{acc}i.a_i \approx b_i$ ならば $\exists^{huge}M.\forall i \leq M\ [\ a_i \approx b_i\ ]$.

$\boxed{58}$ $(\mathbb{Q}, \approx) \simeq (\varepsilon\mathbb{Z}, \approx)$: 連続体
$([-\Omega, \Omega]_\varepsilon, \approx)$: 剛網連続体
$((-\infty, \infty)_\varepsilon, \approx) \simeq ((-\infty, \infty)_\mathbb{Q}, \approx)$: 網連続体
$([0, 1]_\varepsilon, \approx)$: 剛網連続体
$((0, 1]_\varepsilon, \approx)$ etc: 網連続体

$\boxed{59}$ コンパクト性の定義: $\forall^{huge}K\exists A.|A| \leq K\ \&\ \overline{A} = X$.

$\boxed{60}$ 距離連続体ではコンパクト性はプレコンパクト性と同値

[1]一見すると溢出定理の形をしているが、$a_i \approx b_i$ は客観的条件ではないので溢出定理は使えない。

4 実数

$\boxed{61}$ $\mathbb{R}_0 = ((-\infty, \infty), \approx) \simeq ((-\infty, \infty)_\varepsilon, \approx)$:網連続体

$\boxed{62}$ $\mathbb{R}_0$ 上の**実関数**とは、連続な関数 $(-\infty, \infty)_\varepsilon \to (-\infty, \infty)_\mathbb{Q}$[2]の同値類。

$\boxed{63}$ $\mathbb{R}_0$ の四則演算. $a \approx a', b \approx b'$ ならば

- $a + b \approx a' + b'$
- $ab \approx a'b'$.
- $a \not\approx 0$ ならば $|\frac{1}{a}| < \infty$, $\frac{1}{a} \approx \frac{1}{a'}$.

$\boxed{64}$ べき r^n $(n \in \mathbb{N}_{acc})$ は $\mathbb{R}_0$ 上の実関数.

$\boxed{65}$ n 乗根 $r^{\frac{1}{n}}$ $\quad (n \in \mathbb{N}_{acc})$ は $\mathbb{R}_0$ 上の実関数. $r^{\frac{1}{n}} := \max\left\{ k\varepsilon \;\middle|\; (k\varepsilon)^n < r \right\}$

$\boxed{66}$ 多項式 $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ (ただし $n \in \mathbb{N}_{acc}$) は実関数.

$\boxed{67}$ $\frac{1}{r}$ は $(0, \infty)_\varepsilon$ 上の実関数.

$\boxed{68}$ 指数関数.

(a) heuristics: $\exp(kx) = \exp(x)^k$, $\exp(x) \approx 1 + x$ $(x \approx 0)$ より

$$\exp(x) = \exp\left(\Omega \frac{x}{\Omega}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{\Omega}\right)\right)^\Omega \approx \left(1 + \frac{x}{\Omega}\right)^\Omega.$$

(b) そこで、$\exp(x, \Omega) := \left(1 + \frac{x}{\Omega}\right)^\Omega$ と有理数を定義[3].

$\boxed{69}$ 問題:有界か？連続か？Ω のとり方によらないか？

$\boxed{70}$ 有界性.

- $x = k \in \mathbb{N}_{acc}$ のときいえばよい。二項定理より

$$\left(1 + \frac{k}{\Omega}\right)^\Omega = \sum_{i=0}^{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\Omega}\right)\left(1 - \frac{2}{\Omega}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{\Omega}\right) \frac{k^i}{i!}.$$

$\ell \in \mathbb{N}_{acc}$ のとき

$$\sum_{i=0}^{\ell} \left(1 - \frac{1}{\Omega}\right)\left(1 - \frac{2}{\Omega}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{\Omega}\right) \frac{k^i}{i!} \approx \sum_{i=0}^{\ell} \frac{k^i}{i!}.$$

---

[2] $[-\Omega, \Omega]_\varepsilon$ 上の $[-N, N]$ $(N \gg 1)$ 値写像に拡張できる。

[3] べき n^m は任意の n, m について定義できるかどうかは保証できないが、$n, m \in \mathbb{N}_{acc}$ については弱帰納法により定義できるので、拡張公理より、ある $M \gg 1$ があり $P, Q \in [1..M]$ について P^Q が定義できる。$x = \frac{A}{B}$ のとき、$\left(1 + \frac{x}{\Omega}\right)^\Omega = \frac{(B+A\Omega)^\Omega}{(B\Omega)^\Omega}$ は $B + A\Omega < M, B\Omega < M$ の範囲で意味を持つ。$(-\infty, \infty)_{1/\Omega}$ 上で定義すれば良いので、$|A| < \Omega^2$ としてよい。従って、$\Omega + \Omega^3 < M$ となるような $\Omega \gg 1$ を選んでおけばよい。

よって、Robinson の補題より

$$\sum_{i=0}^{M}\left(1-\frac{1}{\Omega}\right)\left(1-\frac{2}{\Omega}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{\Omega}\right)\frac{k^i}{i!}\approx\sum_{i=0}^{M}\frac{k^i}{i!}.$$

となる $M\gg 1$ がある。よって

$$\left(1+\frac{k}{\Omega}\right)^{\Omega}\approx\sum_{i=0}^{M}\frac{k^i}{i!}+\sum_{i=M+1}^{\Omega}\left(1-\frac{1}{\Omega}\right)\left(1-\frac{2}{\Omega}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{\Omega}\right)\frac{k^i}{i!}$$

$k^2<i$ のとき、

$$\frac{k^i}{i!}=\frac{k^i}{k^2!}\frac{1}{(k^2+1)(k^2+2)\cdots i}\leq\frac{k^i}{k^2!}\frac{1}{(k^2)^{i-k^2}}=c\frac{1}{k^i},$$

ただし $c=\frac{k^{2k^2}}{k!}\in(-\infty,\infty)_{\mathbb{Q}}$. よって

$$\text{第二項}\leq\sum_{i=M+1}^{\Omega}\frac{k^i}{i!}\leq c\sum_{i=M+1}^{\Omega}k^{-i}=c\frac{k^{-M-1}}{1-\frac{1}{k}}\approx 0$$

また、

$$\text{第 1 項}=\sum_{i=0}^{k^2}\frac{k^i}{i!}+\sum_{i=k^2+1}^{\Omega}\frac{k^i}{i!}$$

この最初の項は有界で、第二項も $\frac{ck^{-k^2-1}}{1-\frac{1}{k}}<\infty$ 以下。

$\boxed{71}$ 連続性の証明. $u\approx v$ のとき、$\ell\in\mathbb{N}_{acc}$ について

$$\sum_{i=0}^{\ell}\frac{u^i}{i!}\approx\sum_{i=0}^{\ell}\frac{v^i}{i!}$$

よって、Robinson の補題からある $M\gg 1$ について

$$\sum_{i=0}^{M}\frac{u^i}{i!}\approx\sum_{i=0}^{M}\frac{v^i}{i!}.$$

ゆえに

$$\exp(u,\Omega)\approx\exp(v,\Omega).$$

$\boxed{72}$ 積公式 $\exp(x+y,\Omega)\approx\exp(x,\Omega)\exp(y,\Omega)$.

- 証明.

$$\begin{aligned}\exp(x,\Omega)\exp(y,\Omega)&=\left(1+\frac{x}{\Omega}\right)^{\Omega}\left(1+\frac{y}{\Omega}\right)^{\Omega}\\&=\left(1+\frac{x+y+\frac{xy}{\Omega}}{\Omega}\right)^{\Omega}\\&\approx\left(1+\frac{x+y}{\Omega}\right)^{\Omega}=\exp(x+y,\Omega).\end{aligned}$$

$\boxed{73}$ 対数は $\exp(x)$ の逆関数として定義：

$$\log(r,\Omega) := \max\left\{ \frac{i}{\Omega} \;\middle|\; \exp\left(\frac{i}{\Omega},\Omega\right) < r \right\}.$$

$\boxed{74}$ $r^s := \exp(s\log(r,\Omega),\Omega)$.

5 巨大語のなす連続体

$\boxed{75}$ $W_{\le\Omega} := \{\, 0,1 \,\}^{\le\Omega}$, $W_\Omega := \{\, 0,1 \,\}^{\Omega}$ の解釈.

(a) $W_{\le\Omega}$: 深さ Ω の 2 分木の頂点集合、W_Ω の leaf 集合.

(b) W_Ω: Ω 次元の超立方体の頂点集合.

(c) W_Ω: $[0..1]_{\frac{1}{\Omega}}$ のべき集合（の特性関数表示）

それぞれに以下の距離関数を導入してきまる連続体を以下考察する。

名称	カントール	双曲空間	べき集合	超立方体
辺	$\{\, w,w0 \,\},\{\, w,w1 \,\}$			$\{\, A, A\bigcup\{\, x \,\} \,\}$
距離 $d(x,y)$	$m(x,y)^{-1}$	$1-\dfrac{m(x,y)}{\Omega}$	$d_p(x,y)$	$\lvert x \bigtriangleup y\rvert$
連結性	NO	NO	YES	YES
コンパクト性	YES	NO	YES	NO
完全性	YES	YES	YES	YES

5.1 カントール連続体

$\boxed{76}$ $\{\, 0,1 \,\}^{\le\Omega}$ を長さが Ω 以下の 01 語のなす有限集合とする。$\{\, w,w0 \,\},\{\, w,w1 \,\}$ を辺とする対称グラフを考え、d_0 をその距離とする。

$\boxed{77}$ **補題 1** $x = x_1\cdots x_{|x|}, y = y_1\cdots y_{|y|}$ に対し $m(x,y) := \min\left\{\, i \;\middle|\; x_i \ne y_i \right\}$ とおくと、$d_0(x,y) = |x| + |y| - 2m(x,y)$.

$\boxed{78}$ **補題 2** $m(x,z) \ge \min\{\, m(x,y), m(y,z) \,\}$. f が単調減少で $f(max(m)) = 0$ ならば $d_f(x,y) := f(m(x,y))$ は超擬距離.

証明. $\underline{m(x,y) = m(y,z)\text{ の場合}}$. $x = ux', y = uy', z = uz'$ とかけるので $m(x,z) \ge |u| = \min\{\, m(x,y), m(y,z) \,\}$. $\underline{m(x,y) < m(y,z)\text{ の場合}}$. $x = ux', y = uy'$ とかけ、$y = vy'', z = vz'$ とかけ $|u| < |v|$. $v = uu'$ とかくと、$y = uu'y''$ となるので、$y' = u'y''$ とかける。したがっ

て、u' の最初の文字は y' の最初の文字なので x' の最初の文字とは異なる。$x = ux', z = uu'z'$ で、x' と u' の最初の文字が異るので、$m(x,z) = |u| = m(x,y) = \min\{ m(x,y), m(y,z) \}$. ∎.

$\boxed{79}$ **系 1** $(\{0,1\}^{\Omega}, d_0)$ は超距離空間.

証明. $d_0(x,y) = 2\Omega - 2m(x,y)$. ∎

$\boxed{80}$ **命題 1** $d_C(x,y) := 2^{-m(x,y)+1} - 2^{-|x|} - 2^{-|y|}$ は $\{0,1\}^{\leq\Omega}$ 上の距離であり、$\{0,1\}^{\Omega}$ への制限

$$d_C(x,y) = 2(2^{-m(x,y)} - 2^{-\Omega})$$

は超距離である。

証明. 辺 $\{x, xi\}$ に長さ $2^{-|x|}$ を与えた時の距離が d_C となる。∎

$\boxed{81}$ **定義 1** $(\{0,1\}^{\leq\Omega}, d_C)$ から定まる連続体をカントール連続体という。

$\boxed{82}$ **補題 3** $|w|$ が到達可能で、$w \approx u$ ならば $u = w$.

証明. $w \approx u$ とすると $(2^{-m(w,u)} - 2^{-|w|}) + (2^{-m(w,u)} - 2^{-|u|}) \approx 0$. したがって、$m(w,u) \leq |w|, |u|$ より、$2^{-m(w,u)} \approx 2^{-|w|}$, $2^{-m(w,u)} \approx 2^{-|u|}$. $|w|, |u|, m(w,u) \in \mathbb{N}_{acc}$ より $m(w,u) = |w| = |u|$. よって $w = u$. ∎

$\boxed{83}$ $\{0,1\}^{\leq\Omega}$ のなかで、長さ M 以下の語のなす部分集合は稠密である。

$\boxed{84}$ **系 2** 剛網距離連続体 $(\{0,1\}^{\leq\Omega}, d_C, \approx)$ はコンパクトである。

証明$N \gg 1$ を任意にとり $2^{K+1} < N$ となる $K \gg 1$ をとる。長さが K 以下の語の部分集合は稠密で、個数は $\sum_{i=0}^{K} 2^i = 2^{K+1} - 1 < N$. ∎

$\boxed{85}$ **系 3** カントール連続体 $(\{0,1\}^{\Omega}, d_C)$ もコンパクトである。

$\boxed{86}$ **命題 2** カントール連続体は連結ではない。

証明. 巨大点列 $(x_i)_{1\leq i\leq N}$ が $x_i \approx x_{i+1}$ を満すとする。d は超距離なので、

$$d(x_1, x_n) \leq \max_i d(x_i, x_{i+1}) \approx 0.$$

よって、$x \not\approx y$ ならば x, y を結ぶ Sorites 点列が存在しない. ∎

$\boxed{87}$ **命題 3** カントール連続体は完全である。

証明 $x = ya$ $(|y| = \frac{1}{2}\Omega)$ とするとき、$u = yb$ ならば $d_C(x,u) = d_C(ya, yb) \approx 0$. 従って $x \approx u \neq x$ となる u が少なくとも $2^{\frac{1}{2}\Omega}$ 個あるので、x は孤立点ではない。∎

5.2 双曲連続体

$\boxed{88}$ $\{0,1\}^{\leq\Omega}$ の距離 $d=\frac{d_0}{2\Omega}$ を考える。$\{0,1\}^{\Omega}$ 上で $d(x,y)=1-\frac{m(x,y)}{\Omega}$ より超距離.

$\boxed{89}$ 例. $|w|,|u|$ が到達可能ならば $w\approx u$. $|w|,|u|=\frac{\Omega}{2}$ ならば、$d(w0u,w1u)\approx\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{90}$ $d(x,y)<\frac{n}{\Omega}$ は「x,y が枝わかれをしたのが n 世代前以降である」という同値関係.

$\boxed{91}$ **命題 4** 双曲連続体 $(\{0,1\}^{\Omega},d,\approx)$ は局所コンパクトではない。

証明. $w\in\{0,1\}^{\Omega}$, $r\succ 0$ とし、$B_r(w)$ がコンパクトでないことを示す。$B_r(w)$ 上の同値関係 $d(x,y)<\frac{r}{2}$ の同値類の数は、$2^{\frac{r\Omega}{2}}$ 個程度. 従ってプレコンパクトではなく、コンパクトではない。∎

$\boxed{92}$ **命題 5** 双曲連続体は完全である。証明. $w\in\{0,1\}^{\Omega}$ に対し、最後の $\sqrt{\Omega}$ 個の文字を入れかえたものを w' とすると $d(w,w')=\dfrac{\sqrt{\Omega}}{\Omega}\approx 0$ かつ $w\neq w'$. こういう w' は $2^{\sqrt{\Omega}}$ 個あるので w は孤立点ではない。

$\boxed{93}$ **命題 6** 双曲連続体は非連結.

証明. d は超距離なので Sorites 点列は存在しない。 ∎.

5.3 べき集合

$\boxed{94}$ $w\in\{0,1\}^{\Omega}$ と $[0,1]_\varepsilon$ $(\varepsilon:=\frac{1}{\Omega-1})$ の部分集合 $X(w):=\left\{\ (i-1)\varepsilon\ \middle|\ w(i)=1\ \right\}$ と同一視.

$\boxed{95}$ $A,B\subset[0,1]_\varepsilon$ に対し $d_p(A,B):=\max\{\max_{a\in A}d(a,B),\max_{b\in B}d(A,b)\}$. ただし $d(a,B):=\min\left\{\ |a-b|\ \middle|\ b\in B\ \right\}$.

$\boxed{96}$ **補題 4** d_p は距離関数であり、$d_p(A,B)\approx 0\Leftrightarrow\overline{A}=\overline{B}$.

$\boxed{97}$ **命題 7** べき連続体 $(\mathbf{pow}\ ([0,1]_\varepsilon,d_p,\approx)$ は連結で完全.

$\boxed{98}$ **定理 1** べき連続体はコンパクト.

証明. $N\gg 1$ とする. $2^M<N\leq 2^{M+1}$ となる $M\gg 1$ をとる。各 $1\leq i\leq M$ に対し $\frac{i}{M}\simeq n_i\varepsilon$ となる n_i を選び $A:=\left\{\ n_i\varepsilon\ \middle|\ 1\leq i\leq M\ \right\}$ とおくと、$|A|=M$ かつ $\overline{A}=[0,1]_\varepsilon$. $B\subset X$ とし、各 $b\in B$ について $b\approx a_b\in A$ でとなる a_b をとり $\widetilde{B}:=\left\{\ a_b\ \middle|\ b\in B\ \right\}$ とおくと、$d_p(B,\widetilde{B})\approx 0$. 従って、$\overline{\mathbf{pow}\ (A)}=\mathbf{pow}\ (X)$. しかも $|\mathbf{pow}\ (A)|=2^M<N$ ∎

5.4 超立方体

$\boxed{99}$ $\{0,1\}^\Omega = \mathbf{pow}(\{[1..\Omega]\})$ と同一視. これを頂点集合とし、辺を $\{A, A\bigcup\{b\}\}(b \notin A)$ とするグラフを考える。グラフ距離を d_H とし、$d_h := \frac{d_H}{\Omega}$ とおく。剛網距離連続体 $(\{0,1\}^\Omega, d_h, \approx)$ を**超立方体**という。

$\boxed{100}$ **補題 5** $d_H(A,B) = |A \triangle B|$.

証明. $A = A' \coprod C, B = B' \coprod C, A' \bigcap B' = \emptyset$ とする. A から B への最短経路は A から C までの長さ $|A'|$ の道のあと C から $|B|$ への長さ $|B'|$ の道なので、$d_H(A,B) = |A'| + |B'| = |A \triangle B|$. ∎

$\boxed{101}$ **命題 8** 超立方体は連結で完全。

$\boxed{102}$ 注意: 部分集合 $B \subset X$ と全単射 $\sigma : [1..\Omega] \to [1..\Omega]$ に対し $T(\sigma, B)A := \sigma(A) \triangle B$ と定義すると $T(\sigma, B)$ は超立方体のグラフ同型であり等長変換となり、合成は $T(\sigma_1, B_1)T(\sigma_2, B_2) = T(\sigma_1\sigma_2, \sigma_1 B_2 \triangle B_1)$. これより等長変換群が推移的に働いていることがわかる。

$\boxed{103}$ **命題 9** 超立方体は局所的にもコンパクトでない.

証明. 等長変換群が推移的に働いているので、任意の $r \succ 0$ について、$\emptyset$ の r 近傍が非コンパクトであることを言えばよい。$N := [r\Omega] \gg 1$ とおくと、$\{0,1,\cdots,N-1\}$ の部分集合は $\emptyset$ との距離は r 以下である。従って、$\mathbf{pow}(\{0,1,\cdots,N-1\})$ に距離 d_h を与えたものがプレコンパクトではないことを言えばよい。$2^{M+1} < N \leq 2^{M+2}$ となる $M \gg 1$ をとる。二進展開が M 桁以下 (つまり 0 以上 $2^{M+1}-1$ 以下) の数のなかで二進展開の第 i 位が 1 であるもののなす部分集合を A_i とおくと $|A_i| = 2^{M-1}$ であり、$i \neq j$ のとき、$A_i \triangle A_j$ は i 位と j 位が $1,0$ または $0,1$ のものなので、個数は 2^{M-1}. 従って $2^{M+2} \geq N$, $\frac{N}{\Omega} > \frac{r\Omega-1}{\Omega} = r - \frac{1}{\Omega}$

$$d_h(A_i, A_j) = \frac{2^{M-1}}{\Omega} = \frac{2^{M-1}}{N}\frac{N}{\Omega} > \frac{r}{8} - \frac{1}{8\Omega} > \frac{r}{16}.$$

従って、超立方体はプレコンパクトではありえないので、コンパクトではない。∎

6 射の網連続体

$\boxed{104}$ 剛網連続体 C, D に対し、$C(C,D) := (Cont(|C|,|D|), \approx)$.
ただし、$Cont(|C|,|D|) \subset Fun(|C|,|D|)$

$\boxed{105}$ その同型類は C, D の同型類にしかよらない。

$\boxed{106}$ Ascoli-Arzela 定理. C, D をコンパクトな剛網距離連続体のとき、$C(C,D)$ の部分連続体 E が剛網連続体と同型ならばコンパクト.

$\boxed{107}$ 証明の概要. $K \gg 1$ に対し $L^L < k$ となる $L \gg 1$ をとる。C, D はコンパクトなので個数が L 個以下の稠密な部分集合 $X \subset |C|, Y \subset |D|$ をとれる。

$(X, \approx) \simeq C$, $(Y, \approx) \simeq D$ なので、$C(C,D) \simeq C(X,Y)$. この同型で、E に対応する部分剛連続体 $D \subset C(X,Y)$ をとると、$|D|$ の個数は $|X|^{|Y|}$ 以下なので $|D| \leq L^L < K$ となる。従って、E も、個数が K 以下の稠密な部分集合を持つ。∎

$\boxed{108}$ 系. $C(C,D)$ の同程度連続な部分連続体はコンパクト.

$\boxed{109}$ $E \subset Fun(|C|,|D|)$ が同程度連続 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
ある $s:\mathbb{N}_{acc} \to \mathbb{N}_{acc}$ について

$$\forall^{st} k \forall f \in E \left[d(x,y) < \frac{1}{s(k)} \Rightarrow d(f(x),f(y)) < \frac{1}{k} \right]$$

coarse geometry

$\boxed{110}$ 定義. $\mathcal{E} \subset \mathbf{pow}\,(X \times X)$ が coarse topology とは

- $\Delta_X \in \mathcal{E}$,
- $F \subset E \in \mathcal{E}$ ならば $F \in \mathcal{E}$,
- $E \in \mathcal{E}$ ならば ${}^{t}E \in \mathcal{E}$,
- $E, F \in \mathcal{E}$ ならば $E \bigcup F \in \mathcal{E}$,
- $E, F \in \mathcal{E}$ ならば $E \circ F \in \mathcal{E}$.

$\boxed{111}$ 例. 距離空間 $M = (X,d)$ に対し,

$$\mathcal{E}_M := \left\{ E \subset X \times X \;\middle|\; \exists n.(x,y) \in E \Rightarrow d(x,y) < n \right\}.$$

$\boxed{112}$ $\widehat{E} := \bigcup \mathcal{E}$ とおくとこれは同値関係.

(a) 証明. $(x,y) \in \widehat{E}$ とは、ある $(x,y) \in E \in \mathcal{E}$ について $(x,y) \in E$ ということなので、反射的、対称的なのは明らか。さらに推移的である。実際、$(x,y) \in E_1 \in \mathcal{E}$, $(y,z) \in E_2 \in \mathcal{E}$ とする。このとき $(x,z) \in E_1 \circ E_2 \in \mathcal{E}$.

(b) $\widehat{E} \in \mathcal{E}$ ならば、$\mathcal{E} = \mathbf{pow}\,(\widehat{E})$.

(c) 上の距離空間から決まる $\mathcal{E}_M$ については、$\widehat{E} = X \times X \notin \mathcal{E}_M$.

(d) $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\left\{ E_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{acc} \right\})$ とおくと $\widehat{E} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; d(x,y) < \infty \right\} \neq X^2$. $\widehat{E}$ は半集合であり $\mathcal{E}$ の要素ではないが、$\mathcal{E} = \mathbf{pow}\,(\widehat{E})$ となる。ただし半集合 U に対し $\mathbf{pow}\,(U)$ は U の部分集合の全体.

$\boxed{113}$ $G = (V,E)$ を連結な有向グラフ,$d(x,y)$ をグラフ距離とする。$\Omega \gg 1$ をとり、$x \approx y$ を $\frac{d(x,y)}{\Omega} \approx 0$ と定義する。$\mathcal{E} := \left\{ E \subset X \times X \;\middle|\; (x,y) \in E \Rightarrow x \approx y \right\}$ は coarse structure.
半集合 $E_{\approx} := \left\{ (x,y) \;\middle|\; x \approx y \right\}$ を使うと、$\mathcal{E} = \mathbf{pow}\,(E_{\approx})$.

$\boxed{114}$ 資料

- `http://en.wikipedia.org/wiki/Coarse_structure`
- John Roe, Lectures on Coarse Geometry (University Lecture Series),AMS 2003, ISBN 0821833324.

第 III 部

６月２８日

復習

$\boxed{115}$ （砂山の公理）到達可能数は作用 $n \mapsto n+1$ で閉じているが、到達可能不能数がある。

(a) 逆理の懐柔法：到達可能性は不定概念とする。到達可能数は集合を形成しないとする。

$\boxed{116}$ 帰納法公理

(a) 客観的で確定的条件 (いわゆる Δ_0 条件) については通常の帰納法が成り立つ。

(b) 一般の確定的条件については弱帰納法が成り立つ。

$\boxed{117}$ 集合は有限

(a) 通常の無限集合は、プロパ半集合と半集合ではないプロパクラスとに分岐。

- 例：自然数の全体のクラス $\mathbb{N}$ と 到達可能な自然数の半集合 $\mathbb{N}_{acc}$
- 例：有理数の全体のクラス $\mathbb{Q}$ と半集合 $\mathbb{Q}_{acc,\varepsilon} = \left\{ r \in \varepsilon\mathbb{Z} \;\middle|\; |r| < \infty \right\}$

$\boxed{118}$ 溢出定理: 半集合について論じる原理

(a) 定理. 半集合上で成り立つ客観的性質は、半集合を真に含む集合上で成り立つ。

$\boxed{119}$ 関数 (function)：プロパクラスでは確定条件で記述できる対応のみを関数とみる。

(a) 拡張公理. 半集合から集合への関数は、半集合を真に含む集合上に拡張できる。

$\boxed{120}$ 連続体：クラス＋主観的同値関係（識別不能関係）

(a) 主観的同値関係に対する多重推移律は、到達可能ステップ数についてだけ保証される。

(b) 例：$\mathbb{R} = (\mathbb{Q}, \approx)$,$\mathbb{R}_{acc} = (\mathbb{Q}_{acc} \approx)$

(c) 網連続体：半集合＋主観的同値関係, 剛網連続体：集合＋主観的同値関係

(d) 連続体の同値性: 例：$\mathbb{R}_{acc} \simeq (\mathbb{Q}_{acc,\varepsilon}, \approx)$:

- 幾何の対象（多面体・多様体等）は網連続体として表現可能.

(e) 位相

- 連結性:任意の二点 a, b が $\approx$ 鎖で結ばれる.
- x が A の集積点:巨大数個の A 点が x と識別不能.
- 完全性 (perfect): どの点も集積点.
- コンパクト性：稠密部分集合の要素数が、巨大数の範囲でいくらでも小さくできる。

(f) 距離的連続体 ($x \approx y \overset{def}{\Longleftrightarrow} d(x,y) \approx 0$)
- 完備である（コーシー点列と収束点列が同概念となる）
- 定理. プレコンパクト性[4]とコンパクト性が一致.
- 系. 要素同志が相互に識別可能な巨大部分集合があるとコンパクトではない。

7 微分

$\boxed{121}$ 方針. 正の無限小 ε に対し、$L\varepsilon \approx 0$ となる巨大数 L がある（例：ε の逆数の整数部分の平方根). これは「どの特定された無限小も、無限小全体というミクロな半集合の中でも無限小である」と標語的に表現できる。したがって、定まった無限小部分での挙動を無視しても、「無限小近傍の中でのグローバル挙動」をとらえることが可能である。無限小内グローバルな挙動は溢出原理により無限小ではない近傍での挙動と連動しているので、微分可能性を無限小近傍でとらえることが可能になる。

$\boxed{122}$ 概要 (ε, δ は無限小の正の有理数を表す)

$\boxed{123}$ $[a,b]$ 上の実関数 F を $[a,b]_\varepsilon$ 上の有理数値関数 f で表現する。これを ε **離散表現**[5]という。

$\boxed{124}$ ε 離散関数[6] f の**差分商**関数: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} := \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$.

$\boxed{125}$ F が**微分可能** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ある ε について、連続差分商を持つ ε 離散表現を持つ。

$\boxed{126}$ **導関数** $F' = [\frac{\Delta f}{\Delta x}]$: f に拠らない。

$\boxed{127}$ ランダウ的記号.

i. $f(x) \equiv_k 0$ if $x \approx a$: $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x \approx a \Rightarrow \frac{|f(x)|}{|x-a|^k} \approx 0$.

ii. $f(x) \approx_k 0$ if $x \approx a$: $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\varepsilon \left[x \approx a \ \&\ |x-a| > \varepsilon \Rightarrow \frac{|f(x)|}{|x-a|^k} \approx 0. \right]$

iii. 補題. ε 離散な f について、各 a について $f(x) \approx_k 0$ if $x \approx a$ が成り立つとき、$L\varepsilon \approx 0$ となる、ある $L \in \mathbb{N}$ について、f を $L\varepsilon\mathbb{Z}$ に制限し $L\varepsilon$ 離散関数 $\widehat{f}$ とすると、$\widehat{f}$ の定義域の a について $\widehat{f}(x) \equiv_k 0$ if $x \approx a$.

$\boxed{128}$ 命題. ε 離散関数 f が連続な差分商をもてば

$$f(x) \equiv_1 f(a) + \frac{\Delta f}{\Delta x}(a)(x-a) \text{ if } x \approx a.$$

$\boxed{129}$ 定理 (Taylor). 実関数 F が微分可能ならば、任意の ε と任意の ε-離散表現 f に対し、ε-離散連続関数 g があり、各 $a \in \varepsilon\mathbb{Z}$ に対し

$$f(x) \approx_1 f(a) + g(a)(x-a) \text{ if } x \approx a. \tag{1}$$

[4]無限小ではない有理数 r を決めると、到達可能個数の部分集合 A があり、どの点 x もある $a \in A$ との距離が r 以下になる

[5]ε 離散表現は無限小値関数の加減の自由度を持つ。

[6]$\varepsilon\mathbb{Z}$ の一部で定義された関数を ε **離散関数**という。

130 定理. 逆に実関数 F に対し、ある ε と、ある ε-離散表現 f と、ある ε-離散連続関数 g について、各 $a \in \varepsilon\mathbb{Z}$ に対し (1) が成り立つならば、F は微分可能である。

131 系. $[a,b]$ 上の実関数 F が微分可能 $\Leftrightarrow$ 任意の ε と $[a,b]_\varepsilon$ 上の任意の表現関数 f に対し、$L\varepsilon \approx 0$ となる $L \in \mathbb{N}$ があり、f を $[a,b]_{L\varepsilon}$ に制限すると、連続な差分商を持つ。

132 高階微分

133 高階微分可能性. 実関数 F が $k-1$ 階微分可能でありその $k-1$ 階導関数 $F^{(k-1)}$ が微分可能なとき、F は k 階微分可能であるといい、$F^{(k-1)}$ の導関数を k 階導関数といいい $F^{(k)}$ と書く。

134 k 次差分商の定義：$\frac{\Delta^k f}{\Delta x^k} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta^{k-1} f}{\Delta x^{k-1}}\right)}{\Delta x}$

135 定理. F が k 階微分可能であるとき、ある ε について、k 階までの差分商が連続であるような ε 離散表現 f があり次が成り立つ：

$$f(x) \approx_k f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta^i f}{\Delta x^i}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} \text{ if } x \approx a.$$

8 測度

136 $p : X \to \mathbb{Q}$ が確率密度関数 $\overset{def}{\iff} 0 \le p(x) \le 1$ かつ $\sum_x p(x) = 1$.

137 部分集合 $A \subset X$ に対し $m(A) := \sum_{a \in A} p(a)$ とおくと有限加法的：
$m(A \bigcup B) = m(A) + m(B) - m(A \bigcap B)$.

138 プロパ半部分集合 P については $m(P)$ は定義できないが、以下のように、「可測な半集合」に対しては $\overline{m}(P)$ が定義でき、ルベーグ測度と同様の性質を持つ。

---

139 X の半集合 P が**零半集合** $\overset{def}{\iff} \forall k \in \mathbb{N}_{acc} \exists A \supset P \ \left[\ m(A) < \frac{1}{k}\ \right]$.
P が集合ならば、$m(P) \approx 0$ と同値.

140 性質 P が**ほとんど確実にに成り立つ**(a.e. に成り立つ) $\overset{def}{\iff} \neg P$ が定める半集合が零半集合.

141 定理. $(P_1, P_2, P_3, \cdots)$ が零半集合の列のとき、半集合 $\bigcup_i P_i$ も零半集合である。

142 半集合 P_1, P_2 について同値関係を定義： $P_1 \overset{a.e.}{\approx} P_2 \overset{def}{\iff} P_1 \triangle P_2$ が零半集合.

---

143 P が**可測** $\overset{def}{\iff} P \approx A$ となる部分集合 A が存在。
このとき $\overline{m}(P) :\approx m(A)$ は A のとり方によらずに決まる。

$\boxed{144}$ $(P_i)_{i\in\mathbb{N}_{acc}}$ が可測半集合列ならば $\bigcup_i P_i$ も可測半集合となり、$\overline{m}\left(\bigcup_i P_i\right) \leq \sum_i \overline{m}(P_i)$.

$\boxed{145}$ $f \in F_M(X) := Fun(X, [-M, M]_{\frac{1}{M}})$ に対し $E(f) := \sum_{p\in X} p(x)f(x) \in [-M, M]_{\mathbb{Q}}$.

$\boxed{146}$ $E(|f|) < \infty$ のとき f は可積分という。

$\boxed{147}$ チェビシェフの不等式：$m\left(\left\{\ x\ \middle|\ f(x) \geq c\right\}\right) \leq \frac{E(f)}{c}$.

$\boxed{148}$ 系. $E(|f|) \approx 0$ ならば $f \approx 0 a.e.$.

$\boxed{149}$ $f \in F_M(X)$ が L^1 **関数**とは、$\exists^{huge} a \in \mathbb{Q}.E(|f - f^a|) \approx 0$,
ただし、$f^a(x)$ は $|f(x)| > a$ のとき 0、それ以外は $f(x)$.

$\boxed{150}$ 定理. L^1 関数列 f_i が f に各点収束するとき、f も L^1 関数であり、$\lim_i E(|f - f_i|) \approx 0$. 逆に、$f_i$ がある g について $\lim_i E(|f_i - g|) \approx 0$ を満たすとき、g も L^1 関数で、f_i のある部分列が g に a.e. に各点収束する。

9 数理論理学

$\boxed{151}$ 証明可能性などの概念は Σ_1 論理式で定義されるため、確定概念ではない。

$\boxed{152}$ 現実の証明はステップ数が小さいので、到達可能なものととらえることができる。従って、証明可能性は主観的な条件となり、定理の全体は半集合となる。

$\boxed{153}$ 一方、決定可能な性質を満たす論理式の全体は集合をなすので、このことから、種々の決定不能性が出てくる。

$\boxed{154}$ 文字列が accessible $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 文字数が accessible.

$\boxed{155}$ 1 階の言語 $L = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$.

- $\mathcal{F}$: 作用素記号の集合.
- $\mathcal{R}$: 関係記号の集合.
- アリティ:$\alpha : \mathcal{F} \bigcup \mathcal{R} \to \mathbb{N}_{acc}$.

$\boxed{156}$ Term_M: 長さが M 以下の $\mathcal{F}$-項の集合 ($M \gg 1$ ならば到達可能項をすべて含む)
$\mathrm{Term}_{acc} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{acc}} \mathrm{Term}_n$: 到達可能な大きさの項の全体（半集合）

$\boxed{157}$ $\mathrm{Formula}_M$: 長さが M 以下の論理式の集合 ($M \gg 1$ ならば到達可能論理式をすべて含む)
$\mathrm{Formula}_{acc} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{acc}} \mathrm{Formula}_n$: 到達可能な大きさの論理式の全体（半集合）

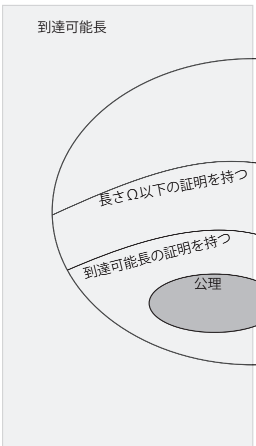
$\boxed{158}$ 定義. L-**半集合**. $I = \Big(|I|, \Big\{\ f^I \ \Big|\ f \in \Omega\ \Big\}, \Big\{\ R^I \ \Big|\ R \in \mathcal{R}\ \Big\}\Big)$.

- $|I|$ は半集合.（$\overline{I}, \overline{I_i}$ 等は $|I|$ の環境集合を表す.）
- $f^I : |I|^{\alpha(f)} \to |I|$. 拡張 $\overline{f} : \overline{I}^{\alpha(f)} \to \overline{I_1}$
- $R^I \subset |I|^{\alpha(f)}$. 拡張 $\overline{R} \subset \overline{I}^{\alpha(R)}$
- 到達可能項 t の変数に $|I|$ の要素を代入すると $|I|$ の要素が定まる。
- 到達可能 L-文[7]φ に対し真偽値が決まる。真のとき、$I \models \varphi$ と書く。

$\boxed{159}$ 1 階の理論 $\mathcal{T} = (L, \mathcal{A})$. 公理のクラス $\mathcal{A} \sqsubset \mathrm{Formula}_{acc}$ は半集合.

$\boxed{160}$ I が $\mathcal{T}$ の**半集合モデル** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ I は L-半集合であり $\forall \alpha \in \mathcal{A}\ [\ I \models \alpha\ ]$.

$\boxed{161}$ 注意（f^I, R^I の拡張の定義域となるような) $|I|$ の環境集合 J を一つとる。$\exists x \in J.[f(x) \in J \ \&\ etc \ \&\ P(x)]$ が J で真のとき $\exists x.P(x)$ が J で真となる、と定義する。J で真となる論理式 $\mathcal{A}$ のある環境集合で J で真となるものが決まるのでこれを $\mathcal{A}_J$ と書く。



$\boxed{162}$ 証明可能性. 証明図 Δ をゲーデル数 $\ulcorner \Delta \urcorner \in \mathbb{N}$ で表現.

- Δ が実際の具体的証明図であればもちろん $\ulcorner \Delta \urcorner \in \mathbb{N}_{acc}$.
- $n, m \in \mathbb{N}$ について、「m は n をゲーデル数とする論理式の証明図のゲーデル数である」という条件 (m, n) は n, m を分析するだけなので有界論理式で表現でき、確定条件であり $\mathbb{N}$ 上で意味がある。

---

[7] 自由変数がない L-論理式のこと

$\boxed{163}$ $\mathcal{T} \vdash_n \varphi \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists x \leq n.(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$
φ が、大きさが n 以下の証明をもつこと。これは客観的確定条件となる。φ が巨大論理式でも意味を持つが、公理が到達可能論理式ならば $n \notin \mathbb{N}_{acc}$ となる。

$\boxed{164}$ $\mathcal{T} \vdash_n \varphi$ となる $n \in \mathbb{N}_{acc}$ のとき、$\mathcal{T} \vdash_{acc} \varphi$ と書く。これは主観的確定条件。

$\boxed{165}$ 定理のクラス

- $\mathrm{Theorem}_M(\widehat{\mathcal{A}}) := \left\{ \varphi \in \mathrm{Formula}_M \;\middle|\; \widehat{\mathcal{A}} \vdash_M \varphi \right\}$: 集合 ($\widehat{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の環境集合).
- $\mathrm{Theorem}_{acc} := \left\{ \varphi \in \mathrm{Formula}_{acc} \;\middle|\; \mathcal{A} \vdash_{acc} \varphi \right\}$: 半集合.

$M \gg 1$ ならば、$\mathrm{Theorem}_{acc} \subset \mathrm{Theorem}_M(\widehat{\mathcal{A}})$.

$\boxed{166}$ 健全性は？

$\boxed{167}$ 完全性定理. $\mathcal{T} \not\vdash_{acc} \perp$ ならば、$\mathcal{T}$ は半集合モデルを持つ。

$\boxed{168}$ 証明.

(168-a) 演算記号はないとしてよい[8]。

(168-b) 客観的条件 $\mathcal{T} \not\vdash_n \perp$ がすべての $n \in \mathbb{N}_{acc}$ について成り立つので $\mathcal{T} \not\vdash_\Omega \perp$ となる $\Omega \gg 1$ がある。一般に論理式の集合 B から、長さ Ω 以下の証明では矛盾が出てこないとき、B は Ω **無矛盾**ということにする。この条件は客観的かつ確定的である。

(168-c) 集合 $\mathrm{Formula}_\Omega$ の Ω 無矛盾な部分集合 B で $\mathcal{A}$ を含むものの全体は集合をなすので、その中で包含関係について極大なものがある。それを $\mathcal{A}_1$ とする。

(168-d) $\mathcal{A}_1$ の中で $\exists x\varphi$ という形の論理式毎に新定数記号 $c_{\exists x\varphi}$ を加え、
さらに論理式 $\exists x\varphi \Rightarrow \varphi(x = c_{\exists x\varphi})$ を $\mathcal{A}_1$ に加えたものを $\mathcal{A}_{1a}$ とする.

(168-e) $\mathcal{A}_{1a}$ も Ω 無矛盾である。これを極大なものに拡張したものを $\mathcal{A}_2$ とする。

(168-f) 以上の操作を Ω 回繰り返して極大 Ω 無矛盾集合 $\mathcal{A}_\Omega$ を作る。

(168-g) $\mathcal{A}_{acc} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{acc}} (\mathcal{A}_n \bigcap \mathrm{Formula}_{acc})$ は集合 $\mathcal{A}_\Omega$ 内の半集合となる。

(168-h) Henkin の補題. $\Delta := \mathcal{A}_{acc}$ について以下が成り立つ. $\alpha, \beta, \varphi \in \mathrm{Formula}_{acc}$ について

- $B \vdash_{acc} \alpha$, $B \subset \Delta$ ならば $\alpha \in B$.
- $\alpha \notin \Delta \Leftrightarrow \neg\, \alpha \in \Delta$
- $\alpha \,\&\, \beta \in \Delta \Leftrightarrow \alpha \in \Delta$ かつ $\beta \in \Delta$.
- $\alpha \vee \beta \in \Delta \Leftrightarrow \alpha \in \Delta$ または $\beta \in \Delta$.
- $\exists x.\varphi \in \Delta \Leftrightarrow \varphi(x = c_{\exists x.\varphi}) \in \Delta$.
- $\forall x.\varphi \in \Delta \Leftrightarrow \neg\, \varphi(x = c_{\exists x.\neg\varphi}) \in \Delta$.

[8] たとえばアリティ2の関数記号 f があるときは、$z = f(x, y)$ を表す3項関係記号 $R_f(x, y, z)$ を持つ理論と「同値」になる

(168-j) C を定数の全体とする。ある $n \in \mathbb{N}_{acc}$ について $\mathcal{A}_n$ の到達可能な $\exists\varphi$ に対応する定数を到達可能といい、その全体がなす半集合を $C_{acc} \sqsubset C$ とする。

(168-k) C 上の確定可能な二項関係 $c_1 \approx c_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} c_1 = c_2 \in \mathcal{A}_\Omega$ は同値関係となる。$V = C/\approx$ とおき、半部分集合 $V_{acc} := \left\{ [c] \in V \;\middle|\; c \in C_{acc} \right\}$ とおく。

(168-l) $\widehat{L} := L \bigcup C_{acc}$ の解釈 I を以下のように定義：

- $|I| = V_{acc}$,
- 定数 c については $c^I = [c]$,
- 関係記号 $R(x_1, \cdots, x_k)$ については $R^I := \left\{ ([c_1], \cdots, [c_k]) \;\middle|\; R(c_1, \cdots, c_k) \in \Delta \right\}$.

(168-m) Henkin の補題により $\alpha \in \mathrm{Formula}_{acc}$ について $\alpha \in \Delta \Leftrightarrow I \models \alpha$ となることが、α 内の論理記号の数についての弱帰納法でわかる。よって $\mathcal{A} \subset \Delta$ は I で真となる。すなわち、I は $\mathcal{T}$ のモデルとなっている。

$\boxed{169}$ 系：コンパクト性定理. 公理の部分集合が半集合モデルをもてば、半集合モデルと持つ。

10 まとめ

$\boxed{170}$ 超準数学は現代数学のオルタナティブと位置づけることが可能.

- 超準数学により不定性の使い方が明らかになった。
- 本質は「超有限」＋「(不定性）溢出原理」。
- 不定性を容認しない現代数学との整合性維持のために歪められ消耗している。

$\boxed{171}$ 形式系として展開はしない。素朴集合論と同じように展開する。

$\boxed{172}$ 有限／無限、連続／離散の二分法が消滅する。

$\boxed{173}$ 複数の識別不能性が必要になる場合がある（ディラック関数の微分など)。

- 関数の連続性・不連続性は識別不能性に依存する。

$\boxed{174}$ 現代数学の再構築作業は微々たる段階. 現代数学から独立させた超準数学は、現代数学のオルタナティブとして “feasibility test ” に合格したと判断できる。

$\boxed{175}$ 理論的生命科学における数学の役割が広がると期待はしているが、まだ具体的な応用を考えていない。