# 有限の中の無限

辻下 徹

立命館大学 理工学部

tjst@se.ritsumei.ac.jp

2005.7.10

註：早稲田大学複雑系高等学術研究所編「複雑系叢書 7 複雑さへの関心」(共立出版 2006)p55-108「有限の中の無限」の校正前草稿

## 目 次

**1 無限集合と巨大数** **4**

1.1 ネバーランド . . . . . 4

1.2 太古からある巨大数 . . . . . 5

1.3 1910 年から 1930 年まで . . . . . 6

1.4 グッドシュタイン数列 . . . . . 9

**2 オールタナティブな視点** **11**

2.1 E. ブラウアー . . . . . 11

2.2 L. ウィトゲンシュタイン . . . . . 12

2.3 E. ボレル . . . . . 13

2.4 A.S. エッセニン・ヴォルピン . . . . . 14

2.5 A. ロビンソン . . . . . 15

2.6 1970 年以降 . . . . . 16

2.7 圏論 . . . . . 16

**3 パリクの逆理** **17**

3.1 実際には証明を書けない定理 . . . . . 17
3.2 ゼロかどうかを現実には決定できない項 . . . . . 19
3.3 指数関数とメタ数学 . . . . . 21
3.4 指数関数の不定性 . . . . . 22
3.5 概無矛盾理論 1 . . . . . 23
3.6 概無矛盾理論 2 . . . . . 24
3.7 パリクの結論 . . . . . 25

**4 有限概念の多様性の吟味 26**

4.1 数学的帰納法と数記法の関係 . . . . . 26
4.2 ネルソンの可述算術 . . . . . 28
4.3 実際的には非可算な有限集合 . . . . . 29

**5 ミシェルスキーの公理系 FIN 30**

**6 ヴォペンカの半集合論 36**

6.1 半集合論の公理 . . . . . 36
6.2 有限集合の再定義 . . . . . 39
6.3 可算半集合 . . . . . 41
6.4 自然数 . . . . . 42
6.5 自然数全体が半集合となることの影響 . . . . . 42
6.5.1 $\Sigma_1$ 集合 . . . . . 42
6.5.2 実数 . . . . . 43

# 序

自然数の全体を集合と考えても、ラッセルの逆理のような簡明な矛盾は見あたらない。矛盾していると真剣に信じている数学者 [47] も居るがいまなお矛盾は見いだされていない[1]。しかし、矛盾によって強制されなくても、自然数全体を集合としない自由も数学にはある。1970 年以降、この自由を追究する種々の試みが

[1] 無限順序数の減少列の有限性を使ってペアノの公理系の無矛盾性は示される [22] が、その証明の背景にある集合論の無矛盾性が何らかの方法で示せると考えている人は居ない。

独立して散発的に展開されている。その中で、J. ミシェルスキ [44] と P. ヴォペンカの試み [61, 62] を中心に、いくつかの試みを紹介した。それを通し、自然数全体が集合を形成しない数学について考えたい。

§1 では無限集合論を巡る古い議論を想起し、§2 で 20 世紀後半に出現したオールタナティブな見方のいくつかを紹介する。§3 では、現実的可能性に関する R. パリクの論文 [50] を詳しく紹介し、§4 で数学的帰納法について素朴な立場から吟味する。有限概念の多様性を基盤にもつ数学の集合論的な定式化の例として、§5 では、巨大数を明示的に取りいれた J. ミシェルスキーによる一階の理論 FIN を、§6 では P. ヴォペンカの半集合論を紹介し、現代数学の中で、有限概念の一意性に依存するのはどのような場合かを吟味する。

# 1 無限集合と巨大数

## 1.1 ネバーランド

S. マックレーンが 1983 年のエッセー「数学の健康」[36, 75] の中で、巨大基数をネバーランドに属するものと述べたことに対し、F.R. ドレイクは「最近の数理論理学と数学の基礎との関係」[15, 75] の中で、次のように述べている：

> ネバー・ネバーランドはもっと以前から始まっていたのだと私は主張する。アッカーマン関数のある記述においては、$A_5(3,2)$ は指数部に $2^{16}$ 個の 2 が積み上げられ、$A_6(3,2)$ では、$A_5(3,2)$ 個の 2 が積みあげられる。(中略) 実際的な限界ということに関するかぎり、$2^{2^{16}}$ はすでにネバー・ネバーランドにあるのである。ギャンディは知ることができることにはおおむね限界があるという考えについて検討した [20]。この仮定の下では大きな有限数と無限数の間に存在論的な差を見つけ出すのは困難であり、$A_6(3,2)$ はたしかにネバー・ネバーランドにあるのである。

巨大基数がネバーランドの代物というマックレーンの批判に対しドレイクはアッカーマン数のような具体的に表示できる数でも巨大基数と同じようにネバーランドの代物ではないのかと反論している。同様のことを、20 世紀前半に P. ベルナイスが、直観主義からの批判への反論として次のように述べている [4]：

> 2 数 $k, \ell$ から数 $k^\ell$ にすぐに移れるが、この移行を数回繰りかえすだけで経験上は決して出会うことのないような数、たとえば、$67^{(257^{729})}$ に達する。直観主義は、通常の数学と同様に、この数は十進法で表現できると主張する。存在命題に対して直観主義が行う批判を徹底して次のように問うことはできないだろうか？この数の十進法表示が存在すると主張するのはどういう意味があるのだろうか、と。というのは、現実には決してそのような表示はできないのだから。

また、最近では N.D. グッドマン [23] は、通常の有限のなかにも理想的要素が入りこんでいることを強調し、理想的な数学的対象を拒否することは数学そのものを否定するに等しいと主張している。

> 従って、もしも現実の存在と理想的な数学的存在との間に一線を画さなければならないというのであれば、その一線は、ビショップが主張す

> るように有限と無限の間にではなく、A. キノが示唆したように、現実的可能性と現実的不可能性の間に引くべきであるようにわたくしには思われる。

これらの発言は、有限の中にも理想的な数学的対象があることの意義を積極的に認める立場からのものではない。理想的な数学的対象を導入するがゆえにプラトニズムを批判する者に対し、理想的な数学的対象に他ならない巨大数を問題にしないのはダブルスタンダードではないのか、と批判しているのに過ぎない。しかし、ためにする議論の中で巨大数をひきあいに出すのではなく、無限集合に匹敵する有効な数学的道具として巨大数に言及する者は少くない。

## 1.2 太古からある巨大数

現実には決して到達できないが、理論的には到達可能な数である「巨大数」は素朴に受けいれられるものであり、どの文明にも、巨大数に相当する言葉があるようだ。身近なものでは、「無量大数」や、古代インドで、梵天の一日の長さを測る単位とされる「劫」(2)などがその典型例である。

巨大数を質的にとらえることは通常とは異なる有限概念を導入することになるが、これは無限集合を認める数学では原理的にできない。実際、新しい有限概念「擬有限」を考えてみよう。それは少くとも帰納的であることが要請される。すなわち $0$ は擬有限であり、$n$ が擬有限であれば $n+1$ も擬有限であることが要請される。ところが、通常の集合論を使うと数学的帰納法が証明できるので、すべての数が擬有限となる。すなわち擬有限は通常の有限と一致してしまうのである。巨大数と無限集合とは原理的に相容れないと言うことができるだろう。

このためか、巨大数は根強い人気があるものの周辺的テーマであり続けている [64, 56]。

A. ロビンソンにより巨大数は非標準的数として捉えられることがわかった。ロビンソン [53] は、超準数学の基礎付けに無限集合が駆使されていることは超準数学の本質ではないと指摘(3)しているが、現状では現代数学のオールタナティブであるという様相は明示的にはなっていない(4)。

(2)大岩を百年に一度薄い布でなでたときに岩がすりへってなくなる時間よりも長い、等の説明が仏典にある。人間界では４３億２千万年あるとも言われているが、宇宙の年齢の定説に近い。

(3)§2.5 参照

(4)A. ロビンソンの「妥協」は超準数学のもつ初等性と教育的利点を覆い隠している。E. ネルソンによる内的集合論 [46, 48] は超準数学の初等化の方向を示唆するものとして成功している。

## 1.3 1910年から1930年まで

カントールが1870年代に無限集合論を提唱してからわずか四半世紀を経た20世紀初頭には無限集合はかなり普及していた。しかし、実無限を無意味とする西洋の伝統の中では、無限集合に不信感を持つ者はクロネッカーだけではなかったであろう。ラッセルの逆理は多くの数学者を動揺させ、無限集合を忌避する動きが急速に広がっていったと推測される。

無限集合が数学にもたらす高い抽象度により数学の統一性が回復できるという希望を持ったヒルベルトは無限集合を普及させるために、その意味を回避する戦略をとった。すなわち、集合という無定義用語の使いかたを公理的に規定し、真か偽かという問いを、証明できるか反証できるか、という問いに置きなおすことにより意味についての論争を避けようとした。この戦略には公理系のカテゴリー性が必要であり、形式的には公理系が完全性と無矛盾性が必要となる(5)。

カテゴリー性　公理系のモデル(6)が同型を除いて唯一つしかないとき、公理系はカテゴリー性を持つという。数や集合のように、意味が唯一に確定して欲しい対象を扱う場合には、公理系がカテゴリー性を持つことが望ましい。

完全性　どの命題も証明できるか、あるいは反証できるとき、公理系は完全であるという。

無矛盾性　完全性は強い公理系を要請するので、命題とその否定命題とが共に証明できてしまう危険性が伴う。そのようなことが起きないという条件が無矛盾性である(7)。矛盾する公理系では、すべての命題は定理となるので、完全ではあるが無意味な理論となる(8)。無矛盾性と完全性との要請の間にはトレードオフがある。

しかし、以上の3つの要請は原理的に満しえないことが以下の諸定理により間も無く判明した。

---

(5) カテゴリー性が成りたてば、完全性と無矛盾性はもちろん成り立つ。

(6) ここでは、「モデル」という言葉を公理系に意味を与える数学的対象、というように広い意味で使っている。

(7) 「無矛盾な一階の理論はモデルをもつ」というゲーデルの完全性定理は、理論は無矛盾でありさえすれば数学的意味を持つ、という信念をサポートする数学的事実であり、「数学の自由」を象徴するものとなっている。完全性定理は正式には、無矛盾な公理系は集合論の公理系の中に表現できる、という言明となる。

(8) 矛盾がおきればすべての命題は証明できるという推論規則は、モデルにおける真偽概念を前提としない立場では不可欠な推論規則ではない。この立場であれば、矛盾に遭遇してもすべての命題が定理となる事態は回避できる。これを利用した paraconsistent logic の分野 [42] がある。

**スコーレム・レーベンハイムの定理**　一階の理論[(9)]は無限濃度のモデル[(10)]を持てば可算濃度のモデルを持つ。非可算濃度の集合も扱う集合論に適用すると矛盾しているように見えたために、当初は逆理と呼ばれていた。これは無限集合を土台とする数学的構造を一階の理論によっては特定できないことを示したもので、特に自然数の集合が一階の理論では捕捉できないことを意味している。[(11)]

なお、「自然数集合 $\mathbb{N}$」で成りたつ命題の全体を公理とする完全な理論 $Th(\mathbb{N})$ ですら、スコーレム・レーベンハイムの定理によりカテゴリー性が成りたたない。[(12)]

---

(9) 一階の理論（形式系）は一階の言語と公理の組で与えられる。一階の言語は関数記号と関係記号からなる。通常、等を表現する 2 変数述語記号"$=$" は共通に含まれているとして言及しない。項は定数記号と変数記号を演算記号を使って組合せた形式的な式である。関係記号あるいは等号記号の引数に項を代入したものを原子論理式という。原子論理式から論理演算子 $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ と、全称記号 $\forall x$、存在記号 $\exists x$ で作られるものを論理式という。公理は、いくつかの論理式からなる。数理論理学を扱った本には一階の理論の説明がかならずある。たとえば [67, 74, 39] などを参照していただきたい。

(10) 一階の言語の定数記号や演算記号を、集合上の要素や演算に対応させることを解釈という。解釈は、自由変数を含まない論理式の真偽を決める。一階の理論の公理が真となるような解釈をモデルと呼ぶ。どのモデルでも真となる論理式を定理と呼ぶ。論理式 $\varphi$ が $\Gamma$ を公理とする一階の理論の定理であることを $\Gamma \models \varphi$ と書く。

(11) スコーレム・レーベンハイムの定理は、自然数概念の多様性を示唆する最初の数学的現象である。スコーレムは形式系では数学的対象を確定できないこと、特に、有限概念が確定できないことを重く考え、形式系に対して否定的な評価を表明した。スコーレムの結果に関連し、フォンノイマンは有限概念が明確にできないことを強く意識し「有限概念の相対性により、我々は有限概念を明確にする基盤を持ちえない」と述べている [60],[32](p132)。

(12) 集合論の公理系が可算モデルを持つことは、公理論的集合論の重要な道具となっていく。また自然数理論のモデルの多様性は、超準数学として数学をゆたかにした [53]。それだけでなく、数論の種々の「非標準的モデル」は数理論理学の重要な研究テーマともなっている [28]。

ゲーデルの第一不完全性定理　ペアノの数論[13] の論理式の中には、標準的モデルでは正しいが、形式的な証明[14]をもたないものがある。健全性定理[15]により、その否定も形式的証明を持たない。したがって、自然数の公理系は完全ではありえない[16]。

ゲーデルの第二不完全性定理　ペアノの公理系が無矛盾であることを表現する論理式はペアノの公理系の中では形式的証明をもたない。

こうしてヒルベルトの戦略は失敗した[17]ように思われるが、ヒルベルトが望んだ無限集合の普及は成就した。

現在、自然数の集合 $\mathbb{N}$ は最小の無限集合としてただひとつ確定している。$\mathbb{N}$ が存在することは、公理論的集合論の無限公理により保証され、唯一性は共通部分公理から導かれる。一方、スコーレムの「逆理」から始まるモデル理論の諸成果や、R. パリクによる種々の「逆理」§3 が示すように、$\mathbb{N}$ を支持する「数学的現象」はなく、$\mathbb{N}$ は、集合論の公理によってしか支えられていないといっても過言ではない。このことは、自然数集合の確定性が矛盾とすれすれのところにある、と

(13) 記号論理学の創始者の一人である G. ペアノ (1858-1932) が定式化した自然数に関する以下の一階の理論。言語は、定数記号 $o$、次の数を表すアリティ 1 の演算記号 $S$、和法と乗法を表すアリティ 2 の演算記号 $+, \times$ で、公理は

- $\neg(S(x) = o)$,
- $S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$,
- （数学的帰納法）自由変数 $x$ を含む論理式 $P$ について、

$$P(o) \wedge \forall x(P(x) \Rightarrow P(Sx)) \Rightarrow \forall x P(x).$$

- $x + o = x$,
- $x + S(y) = S(x + y)$,
- $x \times o = o$,
- $x \times S(y) = (x \times y) + x$.

(14)論理式の列 $\Xi = P_1, \cdots, P_n$ が、論理式の集合 $\Gamma$ を仮定とする推論であるとは、$P_1 \in \Gamma$ または $P_1$ は論理公理であり、$i = 2, \cdots, n$ については、$P_i$ は $\Gamma$ に属するか、論理公理であるか、あるいは、$P_1, \cdots, P_{i-1}$ から推論規則で導かれることをいう。$P_n$ を推論 $\Xi$ の結論という。このとき、$\Gamma \vdash P_n$ と書き、$P_n$ は仮定 $\Gamma$ から導かれる、という。一階の理論の公理から導かれる論理式を、その理論の形式的定理であるという。

(15)一階の理論に関する、「形式的定理はどのモデルでも真となる。」という定理

(16)証明に用いられる固定点論法は R. パリクの定理の証明でも出てくる §3。

(17)この見方については異論もある。たとえば田中一之氏は「逆数学プログラム」（数学の基本的な定理は、集合論の公理と同値なものがあるが、そういう関係を詳細に知らべる研究領域）は現代版の「ヒルベルトのプログラム」といえるのではないかと主張している [72]。また、ヒルベルトの戦略から解放されたことにより、数理論理学が数学の一分野として自由に発展を始める契機となったとも言えるだろう。

言うことを意味しており、それを支えている集合論の公理系がきわめて強力なものであることを意味する。

公理系の「定理の多さ」と「概念の豊かさ」との間にはトレードオフがある。公理を強くすれば、たくさんの定理が証明できるし証明も容易となるが、新しい概念とそれに関する公理を追加したときに矛盾が生じる危険性は高くなるからである。例えば、直観主義的数学では排中律が使えないので定理は乏しくなるし証明も一般に難しくなるが、その分だけ概念は豊富となる。総合微分幾何学 [31][41] はそれを象徴する。超準解析でも通常の集合論の公理系を弱めることで無限小を扱えるようになる。もともと集合論自身でも、素朴な内包性公理を分離公理に弱めることにより集合という概念を救ったのである。

豊かで有用な概念を提供することも数学の重要な役割であると考えると、公理系を弱めることには積極的な意義がある。ペアノの公理系や、集合論の公理系を弱めることで多様な有限概念も実現できる例を §5、§6 で紹介する。

## 1.4 グッドシュタイン数列

R.L. グッドシュタインが 1944 年に考察した数列 [24] がゼロに達するという命題はペアノの公理系では証明できない [29, 73, 14]。

自然数のカントール型 $n$-進表示とは、以下のような表示を言う。

$$x = a_0 n^{k_0} + a_1 n^{k_1} + \cdots + a_p n^{k_p},$$

ただし、$0 < a_0, \cdots, a_p < n$,$k_0 > k_1 > \cdots > k_p \geq 0$ で、各 $k_i$ も同じ表示をする。

たとば $10^8$ を 3 進表現すると

$$\begin{aligned} 100000000 &= 2\cdot 3^{16} + 2\cdot 3^{14} + 2\cdot 3^{13} + 2\cdot 3^{12} \\ &\quad +3^{10} + 3^9 + 3^8 + 3^7 + 2\cdot 3^6 \\ &\quad +3^4 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 3^0 \\ &= 2\cdot 3^{3^2+2\cdot3+1} + 2\cdot 3^{3^2+3+2} + 2\cdot 3^{3^2+3+1} + 2\cdot 3^{3^2+3} \\ &\quad +3^{3^2+1} + 3^{3^2} + 3^{2\cdot3+2} + 3^{2\cdot3+1} + 2\cdot 3^{2\cdot3} \\ &\quad +3^{3+1} + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。

自然数 $x$ の $n$ 進展開を $n+1$ 進展開とみたものから 1 を引いたものを $y$ とする写像を $N : (x, n) \mapsto (y, n+1)$ とする。$(x, n)$ から $N$ を適用して得られる系列

$N^k(x,n)$ の第一成分を $x_k$ とするとき、$(x_0 = x, x_1, x_2, \cdots)$ を $(x,n)$ から始まるグッドシュタイン列という。

例：(28, 3) から始まるグッドシュタイン列。$28 = 3^3 + 1$ だから、第一成分は

$$\begin{array}{lll} & \mapsto & 4^4 = 256 \\ & \mapsto & 5^5 - 1 = 4\cdot 5^4 + 4\cdot 5^3 + 4\cdot 5^2 + 4\cdot 5 + 4 = 3124 \\ & \mapsto & 4\cdot 6^4 + 4\cdot 6^3 + 4\cdot 6^2 + 4\cdot 6 + 3 = 6219 \\ \cdots & \mapsto & 4\cdot 100^4 + 4\cdot 100^3 + 4\cdot 100^2 + 59 = 404040059 \\ \cdots & \mapsto & 4\cdot 1000^4 + 4\cdot 1000^3 + 3\cdot 1000^2 + 157\cdot 1000 + 279 = 4004003157279 \\ \cdots & \mapsto & 4\cdot 10000^4 + 4\cdot 10000^3 + 3\cdot 10000^2 + 154\cdot 10000 + 239 = 40004000301540239 \end{array}$$

のように急速に大きくなるように見える。しかし、いつかはゼロとなることが証明できる。

**定理 1.1 (グッドシュタイン [24])** どの $(x,n)$ から出発しても有限ステップで第一成分が 0 になる。

**証明**　$(x,n)$ $(x > 0)$ に対しベース $n$ を順序数 $\omega$ に置き換えた順序数 $Ord(x,\omega)$ を対応させると $Ord(N(x,n)) < Ord(x,n)$ となり、グッドシュタイン列は順序数の下降列に対応する。従って有限で終らなければならない。

$$\begin{array}{rcl} \omega^\omega + 1 & > & \omega^\omega \\ & > & 4\cdot\omega^4 + 4\cdot\omega^3 + 4\cdot\omega^2 + 4\cdot\omega + 4 \\ & > & 4\cdot\omega^4 + 4\cdot\omega^3 + 4\cdot\omega^2 + 4\cdot\omega + 3 \\ \cdots & > & 4\cdot\omega^4 + 4\cdot\omega^3 + 4\cdot\omega^2 + 59 \\ \cdots & > & 4\cdot\omega^4 + 4\cdot\omega^3 + 3\cdot\omega^2 + 157\cdot\omega + 279 \\ \cdots & > & 4\cdot\omega^4 + 4\cdot\omega^3 + 3\cdot\omega^2 + 154\cdot\omega + 239 \end{array}$$

∎

グッドシュタイン数列の十進法表示は、最初のいくつかを除くと、一旦は、宇宙を埋めつくすほど巨大になる。これが、いつか減少を始めやがてゼロに達するという主張は全く自明ではない。実際にペアノの公理系では証明できないことが以下の議論からわかる。

**定理 1.2** グッドシュタイン数列の有限性はペアノの公理系では証明できない。

証明の概要：グッドシュタイン数列がゼロに達することは、順序数 $\varepsilon_0$ までの超限帰納法と同値である [24]。この超限帰納法によりカット除去定理が証明されペ

アノの公理系の無矛盾性が証明できる [22] ので、もしも、ペアノの公理系によりグッドシュタイン列の有限性が証明できるならば、ペアノの公理系の無矛盾性がペアノの公理系により証明できることになり、ゲーデルの第二不完全性定理と矛盾する。 ∎

$(x, n)$ から初めてゼロに到達するまでの長さを $G(x, n)$ とすると $G(x, n)$ は $x$ についての増大度は大きく、たとえば $G(4, 2) = 3 \times 2^{402653211} - 3$ となる [29]。このことから、定理の別証が得られる [14, 73]。

無限集合は、$G(x, n)$ のような巨大な数を産みだす一方、§1.2 で述べたように、これらの数の巨大性を概念的に扱うことを困難にしている。

# 2 オールタナティブな視点

現行の数学のオールタナティブは 20 世紀を通して散見される。その中から、この小論に関連するものをいくつか振り返りたい。

## 2.1 E. ブラウアー

ヒルベルトは意味のない命題も「イデアル命題」として自然数論に含めることにより無限集合論についても古典論理が通用できると考えた(18)。しかし、ブラウアー (1881-1966)[57] は、有限の世界に妥当する古典論理を「無限」にも無条件に適用することに意味を認めなかった。この点について M. ダメットは以下のように述べている [17, p40]。

> 直観主義的数学では、すべての無限は可能無限であり完結した無限は存在しない。（中略）完結した無限が存在しないという主張が意味するところは、単に、無限の構造を理解するためにはそれを生成するプロ

(18) たとえば「素数は無数に存在する」という命題について次のように述べている [25] 「ユークリッドは素数が無数にあることを証明したが、実際に証明したのは「どの素数 $p$ についても、$p+1$ は素数であるか、$p+2$ が素数であるか、⋯ $p!+1$ は素数である」という意味明瞭な命題である。それに対し、「$p$ より大きな素数が存在する」という命題は、有限的命題に帰着できないので無意味である。無意味ではあるが、このような命題を排除すると、否定命題を作れない命題が出てくる。これは古典論理が使えなくなることを意味するので何としても回避する必要がある。そこで「素数は無数に存在する」というような意味のない命題も、「理想命題」(イデアル論理式) として論理学に取り入れよう、等々。」ヒルベルトが意味があると考えた命題は有界論理式（脚注 (25) 参照）と呼ばれている。有界ではない $\exists x\, P(x)$ や $\forall x\, P(x)$ のようなイデアルな論理式を添加することにより、論理式全体が古典論理のブール演算で閉じたシステムとなり、有限集合と同じように無限集合について議論できるようになる——これがヒルベルトの戦略のもう一つの支柱を成している。

> セスを理解しなければならず、そのような構造に言及するとはそれを生成するプロセスに言及することであり、その構造を無限であると認識することはそのプロセスが終ることがない、ということを認識することである。(中略) 直観主義的な立場からみると、プラトニストの概念は有限にのみ妥当する描像を無限にも乱暴に転移させた結果として生じたものであり、この転移の際に無限の本質全体が破壊されている、なぜなら、無限の本質は構成のプロセスが決して完結しないがゆえに常に成長しつづけるという描像にあるからである。

ブラウアーは排中律が無限にかかわる命題については成立しない場合があることを繰り返し指摘し、「排中律は、$\pi$ の有理性や、天動説と同じように、歴史的となる錯誤である。」とさえ述べ、存在しないとすると矛盾するので存在するという非構成的証明には意味がないとした。存在証明を構成的議論に限定する直観主義的論理はコンピュータ・サイエンスで重要な役割を果している。

なお、P. ベルナイスが指摘しているように (§1.1 参照)、有限の多様性に無関心である点では直観主義数学も現行の数学と余り違いはない。

晩年のヒルベルトは、ブラウアーの数学は数学の発展に有害であると考え、ブラウアーを数学界から政治的に追放したという [58] 。しかし、ヒルベルト自身がブラウアーの考えかたを数学の基盤に据えたのだという見方ができるという見方を E. ネルソンが紹介している [49]。

> フレンケルは (中略) 次のように言っている:「ブラウアーの立場をヒルベルト自身が唱導するようになったことは、ブラウアーの成功の中でも最大のものだ。実際、ヒルベルトは構成性を要求し、アリストテレス論理学を実無限に適用することを良しとする「内容的基盤」を拒否して、ブラウアーの基本的立場を引き継いだのである。」

## 2.2 L. ウィトゲンシュタイン

ブラウアーのウィーンでの講演 (1928 年) を聞いた日から研究を再開したと言われているウィトゲンシュタイン (1889-1950) は、集合論について種々の考察を残している。ウィトゲンシュタインは若い数学者 F.P. ラムゼー (1903-1930)[19] との議論を通して無限集合を駆使する議論をよく知っていたと推測されるが、現代数学における可能性と現実性の混同について以下のような指摘をしている。

[19] ラムゼーはトリニティ・コレジに宛ててウィトゲンシュタインへの研究助成を支持する推薦書を 1929 年に書いている [63, 第 10 巻,p6]。

> 無限な可能性は無限な可能性によって再現される。記号自身の中にはくりかえしの可能性のみが存するのであって、現実性が存する訳ではない。(中略) 数学がそれの可能性を表明しようと試みる場合、即ちその可能性と現実性を混同する場合には、数学をそれの限界内へと追い返して差し支えないのである。(全集 [63] 第 2 巻,p214)

どの自然数にも次の自然数があることは自然数の定義に組みこまれているが、その可能性を無限に繰りかえして得られる自然数の全体を現実的なものと考える「自然数の集合」は数学の限界を超えていると指摘しているとも考えられよう。

以下は、しばしば引用される一節である。

> ヒルベルトは「誰もカントールの楽園から我々を追いだすことはないであろう」と言ったが私はこう言いたい：この楽園から誰をも追いだそうとわたしは思わない。むしろ全く別のことに努めたい、すなわち、これは楽園なんかではないことを示すことで、あなたがた自分自身の判断でそこを後にするようになるよう試みたい。」([63])

## 2.3 E. ボレル

ヒルベルトが確立した現行の数学への批判は、その成立期より現代に到るまで、種々の角度から繰りかえされてきた。D. ファン・ダンツィヒ [59] は、自然数が、種々の構成法と共に拡大される描像を提示しており、$10^{10^{10}}$ は自然数か、という問いは確定した解答がない、と論じている。

フランスでは集合論の勃興期に、無限集合について懐疑的な数学者と肯定的な数学者の間で真剣な議論が交わされた。それを記録する書簡集 [19] では、実無限を歓迎するアダマールに対し、可算無限をも無意味としたベーアやルベーグの姿勢が印象的である。E. ボレル (1871–1956) は可算無限は許容しているが「到達不能数」について生涯にわたって関心を持ちつづけ、80 才のときに出版した「到達不能な数」[6] の序文でこう述べている。

> 数学者は無矛盾な公理系を自由に選び、そこから導かれる抽象的な理論を研究する権利を持っているが、それと同時に数学的対象の中で実際に到達可能なもの、すなわち、明確に特定できるような個別性を持つ対象に特別な地位を与えることにも興味を抱く。このようにして、到達可能性と現実的対象の学問を正確に定義し、そこから仮想性と仮想

> 的対象の学問を展開することが可能である。この二種の学問が相互に道具を提供し合うことも可能となることもある。

この本が提示する「現実的可能性」の諸相は、理論的可能性と現実的可能性の違いを区別する数学の有効性を示唆しており、1959 年のエッセニン・ヴォルピンの超有限主義をはじめとし 1970 年代から数学界に広がった実際的可能性への関心の興隆の数学内部からの引き金の一つとなったと推測される。

## 2.4 A.S. エッセニン・ヴォルピン

エッセニン・ヴォルピンは、 $10^{12}$ に達しない自然数列があると主張するとともに、自然数列の唯一性、原始再帰的関数が全域関数であること、数学的帰納法の原理、形式系の健全性、理論を対象理論とメタ理論に分離すること、直観主義的述語論理の公理等々を批判し、オルタナティブなアプローチを呈示している [18]。集合論の無矛盾性を証明したという草稿（ロシア語で約 400 ページ）もあり、R.O. ギャンディ[20] はその証明の概要を「紹介」している。また D. アイルはエッセニン・ヴォルピンのアプローチの一部を紹介している [27]。あとで紹介する半集合論はエッセニン・ヴォルピンの数学の基礎付けとなるのではないかとヴォペンカはコメントしている。その他、超準数学でエッセニン・ヴォルピンのアプローチを基礎づける試みもある [21]。

F. カルドン [12] は、自然数列は数記法ごとに異なるという視点から、書換理論に基く分析を行っており、たとえば指数関数の原始帰納法による定義が「循環している」ことを示唆している。V.Y. サゾノフ [54] は、パリク [50] の仕事を改良し $10^{12}$ に到達しない自然数列をもつ理論を証明論の方法で提示している。

F. カルドン [12] は「超有限主義」についてサーベイを行い、以下のように述べている。

> 超有限主義は、実現可能なものの構成しか許さないというようなものではなく、（中略）一つの数記法から別の数記法へ移る際には、数え方自身を変更して数記法を用いた数学的言明の意味を変えなければならないこともある、ということを意識して数記法の使い方を制御することである。

## 2.5 A. ロビンソン

ヒルベルトの戦略に対してはネガティブな結果となったスコーレム・レーベンハイムの定理は超準数学に結実した。自然数の公理系の「非標準的モデル」により自然数集合の唯一性の呪縛をある程度無効にできる。実際「自然数論のモデル」の複数性は、一方のモデルからみれば有限だが他方のモデルからは到達できない「巨大数」の数学的表現を与える。これを利用したものが超準数学である。

超準数学は「巨大数」を駆使することにより厳密性を失なわずに直観的に数学が展開できることを示した。超準数学の方法は包括的であり、無限集合と同等のポテンシャルを持つオールタナティブを与えていることは広く認識されている。超準数学は通常の現代数学の中で展開し、無限集合をも駆使しているように見えるが、これは便宜的なことでしかないと、ロビンソン自身が以下のように述べている。

> 超準解析は現代数学の枠組の中で展開されていて、あらゆる種類の無限の存在を肯定しているかのように見える。しかし、形式主義の立場から言えば、新しい数学的実体が導入されたのではなく新しい演繹の仕方が導入されたと考えることができるだろう ([53]p282)。

第二版 (1973 年) の序文に、ロビンソンの講演に対する K. ゲーデルのコメント (1973 年) が記載されている。

> ロビンソン教授は明示的には触れなかったが私にはとても重要と思われる事実を指摘したい。それは、超準解析は初等的な定理だけでなく深い数学的結果の証明をも本質的に単純化するということである。(中略) 理論形式などは今後いろいろ変化するではあろうが、超準解析こそが未来の解析学そのものとなるであろうと信じるに足る理由が十分ある。その一つは、いま述べたように、証明が単純化されることにより発見が容易となることがある。もう一つの理由はもっと説得力がある。すなわち、算術は自然数から出発し、有理数・負の数・無理数等々により数体系を次々と拡大してきた。しかし、実数の次にくるべき極めて自然なステップである無限小の導入が全く放置されたままであった。微分法が発明されて 300 年後にようやく無限小に関する厳密な理論が構築されたことは、数学史における極めて不可解なこととして未来の人たちは考えることであろう。(以下略)

## 2.6 1970年以降

20世紀最後の四半世紀には有限の多様性の定式化への具体的な研究が少なからず見られる。

R. パリク [50] は、次節 §3 で詳しく紹介するように、実際的可能性と原理的可能性の違いを種々の数学的事実を通して具体的に示した。

また、P. ヴォペンカ [62],[61] は、プロパークラス(20) が集合に含まれるような集合論を展開し、有限集合論の中で「無限」を扱う方法を整備した(21) 。これは §6 で取りあげる。

また、J. ミシェルスキー [44] は種々の巨大数を組み込んだ自然数論を展開し超準数学の初等化にかなり成功している(22) 。これは §5 で取りあげる。

なお、20世紀の最後に、著名な数学者達が20世紀の回顧と21世紀の展望を述べている。その中でD. マンフォードは、ランダム性を数学の基盤の奥深くに組みこんだ数学が21世紀の中核を形成するというビジョンを呈示している [43]。

## 2.7 圏論

集合論とは異質な基礎を数学に与えるカテゴリー論 [37, 33] は、異分野間の高度なアナロジーを利用可能にする点で、数学研究における有効性は広く評価されている。さらに W. ロベールは集合論を「初等トポス」として圏論において再構築した [34, 38] 。これは直観主義的集合論の再構築となっており、従来の集合論では定式化できない有用な道具を提供している [31]。

圏論では、構成された2つの対象の同一性を検証する手段はなく同型性を検証できるだけであり、外延性公理により集合の同一性を検証できる集合論との間には大きな違いがある。そのため、対象の構成は同型の不定性を排除できない。こ

(20)明確な性質があれば、それを満すものは集合を成すというのがもともとの集合論の基盤となっていた。しかし、自分自身を含まないという明確な性質 $x \notin x$ を満す集合の集まり $R := \{\, x \mid x \notin x \,\}$ が集合であるとすると、$R \in R$ が $R \notin R$ と同値となるので古典論理では矛盾する。

しかし、集合と考えてはいけないとしても「性質 $P$ を満すものの全体」は明確な意味を持つ。そこで、このような集りを「クラス」と言い、集合と同様にやはり $\{\, x \mid P(x) \,\}$ と書く．外見上は集合の表現法と似ているが、集合の場合は分離公理により $\{\, x \in B \mid P(x) \,\}$ という形の表現しか許されない。たとえば上述のラッセル集合 $\{\, x \mid x \notin x \,\}$ は集合ではないがクラスではあることになる。集合ではないクラスはプロパークラスと呼ばれる。

(21) J.P. メイベリー [40] も自然数の全体が集合をなさない「ユークリッド集合論」を定式化しているが、ヴォペンカの半集合論に近い。

(22) S. ラビン [32] は、実無限の必然性を追求する立場から、ミシェルスキーの試みなど、この小論で紹介した研究のいくつかをかなり詳しく紹介している。

れは、対象の同型性のみ問題にし同一性には関心を持たない数学の性格を忠実に反映している。

しかし圏論でも、射の同一性は重要な役割を果していているので中途半端ではある。射の「同型性」も導入し、結合律における等号を同型に置き換えることで、双圏 (bicategory) の概念が定式化される。しかし、双圏でも二次元射については同形性の概念がない。そこで等号を徹底して同型に置きなおすと「弱 $\omega$-圏論」に到る [1]。複雑系との関係については [69] に若干の考察がある。

1 次元射の合成がどの範囲まで可能かが高次元の射の存在の有無に依存するという描像を利用し、数学的帰納法が妥当な範囲を決める数学的存在について分析することが可能となり、有限の多様性の豊かな表現法を模索できるかもしれない。

数学的対象の操作や認識という要素を枠組の基本に取りいれた広義の圏論の最も自然な枠組は高次元圏論によって与えられると考えられるが、高次元圏論は最近 10 数年の間に大きく発展している。

なお、J.M. ベックが提唱した、圏論におけるホモトピーの概念に基く新しい種類の超有限主義 [2, 3] の発展が期待される。

# 3 パリクの逆理

1971 年にパリクは、実際的可能性と原理的可能性との同一視がもたらす「捻れ」に照明を当てる奇妙な定理群を発表した [50]。この論文における技術的な側面が注目を集め、有界算術 [7](bounded arithmetics) という分野に発展したが、R. パリクの示唆したオールタナティブな数学の方向については E. ネルソンが強い関心を示した [47] 例外はあるが、それほど注目されないまま今日に到っている。最近 S.R. バスが R. パリクの仕事を解説している [8] が、R. パリクがオールタナティブな方向を示唆したことについてはネガティブな見方をしていることが印象的である。

以下、R. パリクの定理群の概要をやや詳しく説明し、オールタナティブな数学についての R. パリクの示唆を紹介したい。

## 3.1 実際には証明を書けない定理

次は [50, 定理 1.3] の特殊な場合である。

**定理 3.1** (パリク) ペアノの公理系には原理的には証明可能であるが、実際には証明できないような論理式がある。

証明の概略.

「論理式 $\varphi$ は長さ $10^{10^{10}}$ 以下の証明を持たない」

という言明は、ゲーデル数[23] $\ulcorner\varphi\urcorner$ についての算術的性質 $LongProof(\ulcorner\varphi\urcorner)$ で表現できる。これは論理式

$$\forall x < 10^{10^{10}}[\neg Proves(x, \ulcorner\varphi\urcorner)]^{(24)}$$

すなわち、「$\varphi$ にはゲーデル数が $10^{10^{10}}$ より小さい証明はない」と論理同値であるが、これは有界論理式[25] なので[26]標準的モデル[27] $\mathbb{N}$ で正しいければ証明可能である。

論理式 $LongProof(x)$ を対角化したものを $G$ とする。すなわち、論理式 $P$ を

$$P(\ulcorner\varphi(x)\urcorner) \ \Leftrightarrow \ LongProof(\ulcorner\varphi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner)\urcorner) \tag{1}$$

が証明できるように定義し、

$$G := P(\ulcorner P(x)\urcorner)$$

と置くと、論理式 $G$ と論理式 $LongProof(\ulcorner G\urcorner)$ とは論理同値となる。

実際、(1) の $\varphi$ に $P$ を代入すると、ペアノの公理系で以下が証明できる。

$$P(\ulcorner P(x)\urcorner) \Leftrightarrow LongProof(\ulcorner P(\ulcorner P(x)\urcorner)\urcorner),$$

すなわち、

$$G \Leftrightarrow LongProof(\ulcorner G\urcorner).$$

---

(23)論理式に数を対応させる方法を決めたとき、論理式 $\varphi$ に対応する数を $\ulcorner\varphi\urcorner$ とあらわす。論理式の有限列にも数を対応させることができるので同じ記号を使う。

(24) $10^{10^{10}}$ という項はないので、正確には、$y = 10^x$ を表現する論理式 $K(x,y)$ を使って $\forall x[\exists u\exists v[K(10,v) \wedge K(u,v) \wedge x < u \Rightarrow \neg Proves(x, \ulcorner\varphi\urcorner)]]$ としなければならない。

(25) 全称記号は $\forall x \leq t$、存在記号は $\exists x \leq t$ ($t$ は $x$ を含まない項) という形をした論理式と論理同値となるときに、論理式は有界であるという。有界論理式では、変数に具体的な数を代入すると、量化記号が、有限個のブール演算に置きなおせるので、 素朴な意味を持つ。

(26)論理式の有限列 $\Xi$ の最後が $P$ であることは、有界論理式 $Last(x,y)$ を使って $Last(\ulcorner\Xi\urcorner, \ulcorner P\urcorner)$ と表現できる。また、論理式の有限列 $\Xi$ が証明であることは、数論の $\Delta_0$ 論理式 $Proof(x)$ で $Proof(\ulcorner\Xi\urcorner)$ と表現できる。$Proves(x,y) := Proof(x) \wedge Last(x,y)$ という有界論理式を定義すると、$Proves(\ulcorner\Xi\urcorner, \ulcorner\Pi\urcorner)$ は、$\Xi$ が $P$ の証明であることを表す。

(27) 自然数集合 $\mathbb{N}$ を自然な方法でペアノの公理系のモデルと見たもの。ペアノの理論の有界論理式については、標準的モデルで真ならば形式的証明ができる。このことは $\Sigma_1$ 論理式についても成り立つ。$\Sigma_1$ 完全性と呼ばれることがある [74]。

さて、この文 $G$ が形式的証明を持たないとすると、$LongProof(G)$ は自明に正しい。この論理式は有界なので形式的証明を持ち、これと論理同値である $G$ も形式的に証明できることとなり矛盾。したがって、$G$ は証明できる。標準的モデルで $G$ は正しいので、$G$ の証明の長さは $10^{10^{10}}$ 以上である。 ∎

なお、$G$ の実際の証明は書きくだせないように長いが、その証明可能性命題 $Provable(\ulcorner G \urcorner)$(28) は短い証明をもっている。実際、上の証明の中で、$G$ が証明可能であることを示した議論を形式化すると $Provable(\ulcorner G \urcorner)$ の数行の証明となる。

パリクの定理は論理的逆理というわけではないが、証明可能性を表現する論理式が、有限の立場での証明可能性を的確には表現していないことを具体的に明らかにしている。この捻れの原因はどこにあるのか(29)。証明可能性論理式 $Provable(\ulcorner G \urcorner)$ が証明されたあと、$G$ 自身が証明できることを結論するとき、自然数が巨大かどうかという点を無視するところが原因となっている。すなわち、証明可能だが証明できない論理式が存在するという逆説は自然数の間には質的な違いはないという前提に直接由来しているのである。有限の立場での証明可能性を形式的に表現するためには複数の種類の自然数が必要となる。

## 3.2 ゼロかどうかを現実には決定できない項

$n$ を自然数とするとき、ゲーデル数が $n$ 以下の証明を $n$-証明と呼ぶ。論理式 $A$ が $n$-決定可能であるとは、つぎのいずれかが $n$-証明可能であることをいう：$A$、$A$ の証

(28) $Provable(x) := \exists y\ Proves(y, x)$ と定義すると $Provable(\ulcorner P \urcorner)$ は $P$ が形式的定理であることを表現する。

(29) 公理系を強めることで証明が短縮されるという現象とみることもできる。この現象はすでにゲーデルが指摘しており [10]、R. パリクによるパイオニア的な仕事 [51] をきっかけに多数の結果が得られている [52]。一例として、二階の述語論理で簡単に証明できるが一階の述語論理では証明が実際には書きくだせない G. ブーロスによる例がある [5]。これは、次の前提から、結論 $F(B(4,4))$ を導くものである：

1. $\forall x B(x, 0) = S0$,
2. $\forall x B(0, Sx) = SSB(0, x)$,
3. $\forall x \forall y B(Sx, Sy) = B(x, B(Sx, y))$,
4. $F(0)$,
5. $\forall x[F(x) \Rightarrow F(Sx)]$,

ここで $F(x)$ は「$x$ が有限である」ことを意図した述語記号であり、公理により $F$ は帰納的であるが、帰納法の公理は $F$ には拡大していない。$B(4,4)$ は 2 の $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ における 2 が約 6 万続く巨大な数であるのである。上の二重帰納法により $B$ が定義できるということの素朴な推論を形式化すると二階の述語論理における $F(B(4,4))$ の簡単な証明を得る。しかし、一階の体系での証明は、公理 5 の具体化をたくさん必要とし現実には書きくだせないほどになることをブーロスは証明している。

明可能性 $Provable(\ulcorner A \urcorner)$、$A$ の証明可能性の証明可能性 $Provable(\ulcorner Provable(\ulcorner A \urcorner)\urcorner)$（これを $Provable^2(\ulcorner P \urcorner)$ と書く）、さらに $A$ の高次の証明可能性 $Provable^k(\ulcorner P \urcorner)(k = 3, \cdots)$、あるいは、$A$ の否定 $\neg A$、否定の証明可能性 $Provable^k(\ulcorner \neg A \urcorner)(k = 1, 2, 3, \cdots)$. 原始再帰的関数[30]をつかって具体的に表現される項を原始再帰的閉項という。この種の項の中には §1.1 で出てきた巨大数を表すものも含まれる。パリクは次のことを示した。

**定理 3.2 (パリク [50, 定理 1.4])** $t = 0$ が $10^{10^{10}}$–決定不能であるような原始再帰的閉項 $t$ がある。

数項がゼロであるという論理式 $t = 0$ は原始論理式で量化記号 $\forall, \exists$ を含まないので、自然数の集合で正しければ証明できる。したがって、「自然数の集合」では、$t$ はゼロであるかゼロでないかのどちらかだから、$t = 0$ か $t \neq 0$ のいずれかは証明可能である。しかし、上の定理によれば、その証明を実際に書き下すことができないだけでなく、それらの証明可能性や、証明可能性の証明可能性等々も、実際に書き下すことができない。

**証明.** これも対角線論法を用いる。$y$-決定可能性は有限個の条件をチェックすれば判定できるので $\{ 0, 1 \}$ 値の原始再帰的関数 $h(x, y)$ で, $A$ が $y$-決定可能のとき $h(\ulcorner A \urcorner, y) = 0$ となり、それ以外のとき $1$ となるものがある。$h(u, v) = 0$ を表現する論理式を $B(u, v)$ とする[31]。論理式 $P(x)$ を

$$P(\ulcorner \varphi(x) \urcorner) = \neg B(\ulcorner \varphi(\ulcorner \varphi(x) \urcorner) \urcorner, 10^{10^{10}})$$

を満すように定義すると、$P(\ulcorner \varphi(x) \urcorner)$ は $\varphi(x)$ の対角化 $\varphi(\ulcorner \varphi(x) \urcorner)$ が $10^{10^{10}}$-決定可能ではないことを表す。$H := P(\ulcorner P(x) \urcorner)$ は自分自身が $10^{10^{10}}$-決定可能ではないことを意味する論理式となる。以上の準備の下で、変数を含まない項を

$$t := h(\ulcorner H \urcorner, 10^{10^{10}})$$

[30] 自然数の組から自然数への関数や関数の中で、加法・乗法・射影から出発して合成と原始帰納法による定義で次々と関数を増やしていくことができる。こうして得られる関数を原始帰納関数という。原始帰納法は、原始帰納関数 $F(x_1, \cdots, x_n, y, z), f(x_1, \cdots, x_n)$ から次の原始帰納法によって新しい関数 $g(x_1, \cdots, x_n, y)$ が定義するもの：

$$\begin{aligned} g(x_1, \cdots, x_n, 0) &= f(x_1, \cdots, x_n), \\ g(x_1, \cdots, x_n, Sy) &= F(x_1, \cdots, x_n, y, g(x_1, \cdots, x_n, y)). \end{aligned}$$

[31] どの原始再帰的関数（たとえば $h(x, y)$）にも、

$$h(x, y) = z \Leftrightarrow P(x, y, z)$$

が証明できるような論理式 $P$ がある。これを使って $B(u, v) = P(x, y, 0)$ と置けばよい。

と定義する。

$t=0$ は決定可能であることから、$\vdash t=0$ または $\vdash t\neq 0$ が成り立つ。もしも $\vdash t=0$ ならば、$H$ は正しいので、$H$ は $10^{10^{10}}$–決定可能ではない。もしも $\vdash t\neq 0$ ならば $h$ の定義より、$H$ は $10^{10^{10}}$ 決定可能ではない。したがって、$t=0$ が $10^{10^{10}}$–決定可能ではないことがわかる。 ∎

## 3.3 指数関数とメタ数学

文字列のゲーデル数は種々の仕方で定義されるが、指数関数を何らかの形で用いる。パリクは、形式系の算術化には多項式関数だけでは不十分であることを指摘している。

S.R. バス [8] による言いかえをすると、$\ulcorner A\urcorner \approx 2^{O(|A|)}$($|A|$ は $A$ の文字数) であるようなゲーデル数を定義したとき、論理式 $A(x)$ に $x=t$ という代入をした後の論理式 $A(t)$ のゲーデル数は以下のような増大度を持つ：

**補題 3.3 (パリク [50, 補題 1.2])** $\ulcorner A(t)\urcorner \approx \ulcorner A\urcorner^{\log(\ulcorner t\urcorner)}$.

証明. 例として、変数 $x$ を $\ell$ 個含む論理式

$$A(x) := S(\cdots((x\times x)\times x)\cdots\times x)=0$$

を考えると、文字列としての長さは $4\ell$ である。この $x$ に長さ $k$ の項 $t$ を代入すると、長さが $(3+k)\ell$ となる。従って、$A(x)$ の文字列としての長さを $p$ とすると、$A(t)$ の文字列としての長さは、$(3+k)p/4$ 以上 $pk$ 以下であり、$pk$ に比例する。従って

$$\ulcorner A(t)\urcorner \approx 2^{pk} = (2^p)^k = \ulcorner A(x)\urcorner^{\log(\ulcorner t\urcorner)}.$$

∎

$x^{\log y}$ のオーダーの関数があれば、ゲーデル数が定義でき不完全性定理が示されることが知られている [9, 47, 68]。

この補題の後でパリクは以下のように述べている。

> べき $x^y$ は「大きな数」を表記するための道具であるだけでなく、数論に「非数学的な」問いを持ちこむ道具ともなっている。
>
> 「非数学的」と言う意味は以下のとおりである。「自分は証明不可能である」というゲーデル論理式 $A$ を考えてみよう。この論理式は論理演

算子と量化記号で表現されているから、確かに $\mathbb{N}$ の性質を表現している。しかし $A$ が真であるが証明できないということを示すには $\mathbb{N}$ の性質は使わずに「証明可能である」という言葉のもつ直観的な意味を使っている。従って、「$A$ は数に関する言明である」というのは、人間は物理的な存在であるから人間の振舞いは物理学の問題である、というのに似ている。たとえ、その言明が真であるとしても、それは極めて理論的であって余り役に立たない。

ゲーデル文の構成の本質は、

$$p(x) := \text{“}x(x)\ \text{は証明できない''}$$

と定義したときに、$x$ に $p$ を代入すると

$$p(p) = \text{“}p(p)\ \text{は証明できない''}$$

となることにあり、この現象を数論で実現したものがゲーデル文であるが、これは複製と代入のメカニズムがあれば実現可能な現象であるので [35]、ゲーデルの不完全性定理は、自然数特有の性質を表現するものではなく、この現象を記述できる特性をペアノの公理系が持つ、ということでしかない。

## 3.4 指数関数の不定性

数学の形式化において、不可欠というわけではないが重要な役割を果している指数関数 $x^y$ は以下のような不定性を持つ。指数関数 $f(x,y) = x^y$ は以下のような性質を満たし、最初の 2 条件は指数関数を帰納的に定義していると考えられている。

$$\begin{aligned} f(x,0) &= 1 \\ f(x,Sy) &= f(x,y) \times x \\ f(x,y+z) &= f(x,y) \times f(x,z) \\ f(x,y \times z) &= f(f(x,y),z) \end{aligned}$$

しかしモデル理論の古典的結果の一つを使うと、以下のことが示される。(32)

**定理 3.4 (パリク)** 標準的自然数モデルが定める完全な理論 $Th(\mathbb{N})$ のモデル $\mathbb{N}^*$ の中で次のようなものがある：$f^* \neq g^*$ かつ、共に上の性質を満す $f^*, g^* : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ がある。

(32) なお、この定理も、自然数集合の一意性を前提とする現行の数学の中での帰結である。

証明の概略. モデル上の変換で、演算記号と述語記号の解釈を不変にするものを自己同型という。$Th(\mathbb{N})$ の非標準的モデルであって、自明ではない自己同型 $\phi$ を持つものが存在することが知られている [13, §3.3]。通常の指数関数を $f^*$ とし、$g^*(x,y) = f^*(x,\phi(y))$ と定義する。このとき、$g^*$ も $f^*$ と同じ性質を満す。たとえば

$$\begin{aligned} g^*(x,y+z) &= f^*(x,\phi(y+z)) = f^*(x,\phi(y)+\phi(z)) \\ &= f^*(x,\phi(y)) \times f^*(x,\phi(z)) = g^*(x,y) \times g^*(x,z). \end{aligned}$$

∎

$n=3$ の場合は $f^*(x,3) = x \times x \times x = g^*(x,3)$ となる。同様に、$n$ が実際の個数として意味があるときは $f^*(x,n) = g^*(x,n)$ が成立する。 すなわち $g^*(x,y)$ は具体的に表示できる $x,y$ については最初の二条件より $f^*(x,y)$ と一致する。このことは、$f^*(x,y) \neq g^*(x,y)$ となる $x,y$ は具体的には表示できないことを意味する。

## 3.5 概無矛盾理論 1

指数関数は不定である以前に全域関数ではないかもしれない。これは計算量理論では頷けることだが、E. ヴォルピンの主張の重要な一部ともなっている。この主張を支持する数学的議論を R. パリクはいくつか与えている。

最初の議論はモデル理論を利用している。ペアノの公理系に原始再帰関数の記号と定義式を追加した公理系は $PRA$(primitive recursive arithemetic) と呼ばれる。これに新しい述語記号 $F$ を加え、次の公理を追加した理論を $PRA_1$ とする。すなわち、$F$ 数は帰納的であるだけでなく、和と積の演算では閉じているが、べき演算については閉じていない、という公理である。

- $\forall x,y[F(x) \wedge F(y) \Rightarrow F(Sx) \wedge F(x+y) \wedge F(x \times y)]$,
- $\forall x,y[F(x) \wedge y \leq x \Rightarrow F(y)]$,
- $\exists x,y[F(x) \wedge F(y) \wedge \neg F(x^y)]$.

**定理 3.5 (パリク [50, 定理 2.1])** $PRA_1$ は $PRA$ の定理保存拡大である。

証明の概略. 背理法による。$PRA$ の論理式 $A$ が、$PRA$ では証明できないが $PRA_1$ では証明できるとする。$PRA$ に公理 $\neg A$ を付け加えた理論 $PRA_2$ は、$PRA$ が無矛盾ならば無矛盾である。

$PRA_2$ の非標準的モデルの一つを $\mathbb{N}^*$ とし $a \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ を選び、$F^*(x)$ を $x \leq a^n$ となる $n \in \mathbb{N}$ があることと定義し、述語記号 $F$ を $F^*$ で解釈する。最初の二条件は明らかに成り立ち、また、$F^*(a)$ は成り立つが $F^*(a^a)$ が成り立たないので、最後の条件も成立する。従って $\mathbb{N}^*$ は $PRA_1$ のモデルにもなることがわかる。したがって この解釈において $A$ も $\neg A$ も真となり矛盾。 ∎

このことから「現実的な数である」という言葉を導入し、さらに現実的な数の次の数だけでなく和と積も現実的な数であるが、べきの演算は現実的な数になるとは限らない、という公理を導入しても、通常の数論が無矛盾ならば無矛盾となることがわかる。

## 3.6 概無矛盾理論 2

パリクはさらに、上の証明で用いた無限大数 $a$ を具体的な巨大数にできることを示した。

$T_1$ をペアノ算術を含む無矛盾な公理系とする。$T_1$ に記号 $F$ を追加し、次の公理系を置く。

- $F(0)$,
- $F(x) \Rightarrow F(S(x))$,
- $x = y \Rightarrow (F(x) \Rightarrow F(y))$,
- $\forall x, y[F(x) \wedge y \leq x \Rightarrow F(y)]$,
- $\neg F(\theta)$.

ここで、$\theta$ は原始再帰的閉項とする。たとえば $\theta = 10^{10^{10}}$.

証明 $\Xi$ の複雑さを測る量として $c(\Xi), r(P)$ を次のように定義する。$c(\Xi)$ は、$A(t) \Rightarrow \exists x A(x)$ (論理式 $A$ は $F$ を含む) というタイプの論理式の出現数、$r(P)$ は、出現する上のタイプの論理式の $A$ 内の量化記号の最大数とする。

**定理 3.6 (パリク [50, 定理 2.2.a])** $F$ を含まない論理式 $B$ の $T_1$ での証明を $\Xi$ とする。$r = r(\Xi), k = c(\Xi)$ と置き、$F(x) \Rightarrow F(S(x))$ が証明 $\Xi$ に $n$ 回出現するとする。もしも

$$ne^*\left(r, \frac{k(k+1)}{2}\right) < |\theta|$$

ならば、$B$ はペアノの公理系でも証明できる。

ただし、$e^*(x,y)$ は、$e^*(0,n)=n, e^*(r+1,n)=e(2,e^*(r,n))$ で定義される超べき関数。$|\theta|$ は項 $\theta$ が標準的モデルで表す自然数。

証明は、$F$ の出現を証明図から消去する際に証明図の大きさの増大を評価する。

この定理により、値 $|\theta|$ が十分大きな項 $\theta$ を選んでおけば、$\theta$ が「有限ではない」という公理を導入して数学を展開しても、ペアノの公理系が無矛盾ならば、具体的な証明において矛盾に遭遇することはないことがわかる。

## 3.7 パリクの結論

以上のような数学的現象を提示したあと、パリク [50] は実際的可能性 (feasibility) に数学も関心を持つべきことを主張し、以下のように述べている。

> ベルナイ数 $67^{257^{729}}$ は、0 から始まり、次の数に移る操作で閉じた集合に実際に含まれるのだろうか？然り、というのが通常の答えだが、ここで見てきたように、通常の数学には夥しいファンタジーが入りこんでいて、そのファンタジーを好む人はファンタジーを享受すれば良いが、このファンタジーを拒絶することには、それを享受するのと同様の意義がある (おそらくもっと意義がある。)

先に述べたように、R. パリクの論文は限定算術という分野を創出し、証明論と計算量理論との深い関係を生みだし、通常の数学の中で大きなインパクトを与えた。しかし、「現実的可能性」を数学の基礎概念とするパリクの論文全体のテーマに自身に関心を示した数学者は E. ネルソン [47],V.Y. サゾノフ [54]、F. カルドン [12]、A. カルボン [11] 等、少数に留まっている。

パリクの 1971 年の論文により原始帰納関数で表示できる具体的な数を巨大数として数学で使えることが明らかになった。1987 年に E. ネルソンが超準解析によって確率解析の再構築 [48] を実行してみせたのは、そのことと無関係ではないだろう。巨大数に基く数学における概念の豊かさは、無限集合を使う推論の多産性の利点を越えると推測されるが、それを実際に示すには多くの時間と労力を要することであることは言うまでもない。

# 4 有限概念の多様性の吟味

巨大数を認める数学では有限概念が多様化する。特に「実際的有限性」と「原理的有限性」が、経験的に、ではなく、数学的に区別されるようになる。これはどういうことであろうか。この点を素朴な立場で考察したい。

## 4.1 数学的帰納法と数記法の関係

数の実際的表示可能性が表示法に依存することは自明なことである。たとえば数の表現方法として十進法の他に一進法を考えよう。一進法は、1 が並ぶ個数を通して数を表現する原始的方法であるが、十進法と比べて余り実用的ではない。たとえば、1111 は 4 を表わし、111111 は 6 をあらわすことは一目でわかるが、11111111111111111111 が 20 を表すことは一目ではわからない。また、十進法では簡単に表わせる数でも一進法では実際には表現できないことがある。実際、十進法でわずか 100 桁で表現できる

$$10^{100} = 10000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000$$

を一進法で表現することは、粒子数が高々$10^{87}$ といわれているこの宇宙では不可能である[33]。一進法で実際に表現できることと十進法で実際に表現できることの間には明確な違いがある。しかし、この違いがどのようなものであるかを理解することは容易ではない。この違いは「砂山の逆理」を通して古来から意識されてきた問題に関連する。これを少し説明しよう。

数学的帰納法は、数についての性質 $P$ が帰納的であることさえ示せれば、すべての自然数が性質 $P$ を持つことがわかる、という推論規則である。ただし、性質 $P$ が帰納的である、とは、「0 は性質 $P$ をもち、$n$ が性質 $P$ をもてば、$n+1$ も性質 $P(n+1)$ を持つ、ということを意味する。この推論規則を「一進法で実際に書ける」という性質に適用してみる。

> 1 は一進法で実際に書ける。もしも数 $n$ が一進法で実際に書けるならば、次の数 $n+1$ も一進法で実際にかけることは明らかである。したがって、数学的帰納法により、すべての自然数は一進法で実際に書くことができる。

しかし十進法では書けるが一進法では実際には決して書けない数があることは上で確認したとおりなので、上の結論は間違っている。どこに間違いの原因があるのだろうか。

---

[33] 具体的数が実際的に表示可能かどうかは物理的宇宙に依存する概念であるが、「別の宇宙」でも、それに応じた具体的な表示不能数があると考えることができるので、ここで考える「実際的不可能性」は、具体的な物理的限界には依存しない抽象度をもった概念と言うことができる。しかも、論理的不可能性とは異質の不可能性である。

この逆理については哲学者が多種多様な解決を提出している [45, 26, 55] が、「一進法で実際にかける」という概念のあいまいさに逆理の原因があり、論理には問題はない、とするものもある。たとえば M. ダメット [16] は「問題は論理ではなく概念自身にあるので、砂山の逆理を解決するために新しい無矛盾な論理を導入しようとするのは無意味である。」と述べ 、あいまいな概念を無矛盾な論理で扱うことはできないと主張している。また、この逆理は真正のものではないとして「解決」する場合も多い。しかし、有限概念の単一性という現代数学の仮説の問題性を示す真正の逆理と筆者は考えている [70, 71]。

性質 $P$ が帰納的であることから、数 $n$ が性質 $P$ を持つことを導くには、次の「多段論法」(34)が介在していると考えることができる：

$$\frac{P(0)\ ,\ P(0) \to P(1)\ ,\ P(1) \to P(2)\ ,\ \cdots\ ,\ P(n-1) \to P(n)}{P(n)}.$$

数学的帰納法により $P(10^{100})$ を示すには、「分子に $10^{100}$ 個の論理式が並ぶ証明図を導入することが必要となるが、現実にはそのようなものは存在しえない(35)。

しかし、数 $n$ が一進法で実際に書けている場合は、$k$ 桁目の 1 のところに、$P(k) \to P(k+1)$ を小さい字で書くことで上の証明図を実際に書くことができる。従って、一進法で書けることと、数学的帰納法の結論が妥当すること、すなわち多段論法の証明図がかけること、とは同値であることが素朴な立場でわかる。一進法では実際に書けないような数については、上の証明図自身が書けないので、数学的帰納法の結論は妥当しないと考えることが自然であろう。

もっと高速な数学的帰納法もある。たとえば、性質 $P$ が 10 進帰納的 であることを、1 は性質 $P$ を持ち、$x$ が性質 $P$ を持てば、その 10 倍も性質 $P$ を持ち、さらに、$y$ が性質 $P$ を持てば、$y$ より小さい $x$ もその数を持つこととする。このとき、通常の数学的帰納法から、すべての数が性質 $P$ を持つことになる。10 進帰納的 な性質 $P$ の場合は $P(10^{100})$ は、仮定が 100 個程度の下のような証明図で示される。

$$\frac{P(1)\ ,\ P(1) \to P(10)\ ,\ P(10) \to P(100)\ ,\ \cdots^{(36)}\ ,\ P(10^{99}) \to P(10^{100})}{P(10^{100})}$$

この場合も、すべての $n$ が $P$ を満すと結論することは無理である。たとえば $P$ が「十進法で表示可能」という性質であれば、二番目の条件は、最後にゼロを書きくわえるだけなので成り立つと誰でも思うが、すべての数が十進法で表示可能であるという結論は正しくない。

(34)分子が仮定、分母が結論を表す

(35)なお、ブーロス [5] が指摘しているように、カット規則を利用すると $P(2^{100})$ 程度ならば現実に証明を書ける。

一般に、$P$ が上の高速帰納法の仮定を満すとき、十進数で書ける数 $n$ については $P(n)$ が成り立つと考えられる(37)。

なお、$P$ を「一進法で表示可能」とするときは、$10^{100}$ が一進法では表示可能でないことをもって、上の高速帰納法が間違っている、と主張することはできない。というのは、一進法で表示されたものを長さ 10 倍にすることができない状況は想像できるので二番目の条件は一般には成り立つとは認めがたいからである。

構成法ごとに高速な帰納法があるが、その結論は、その構成法で具体的に書けるものにしか妥当しない、と考えることが「砂山の逆理」の一つの解決と言うことができるだろう。

## 4.2 ネルソンの可述算術

数学的帰納法の明証性に疑問を持つ E. ネルソン [47] は、ペアノの公理系から数学的帰納法を省いたロビンソンの公理系で解釈できる場合にのみ帰納法に意味があるとする立場で吟味し, 有界論理式(38) についての数学的帰納法が正当化できることを示した。

なお、ネルソンのアプローチは、帰納的性質 $P$ が見いだされたときに「$P$ を満す数」に数の概念を狭める、という描像をとるものであり、公理を決めてその中で得られる結論を捜す、という数学とは一線を画している。$\Delta_0$ 論理式についての帰納法を公理として採用してみるとどうなるか、という $I\Delta_0$ 理論の問題意識とは微妙に異なる。$\Sigma_1$ 論理式(39) $P$ が帰納的であることがわかっても、数の概念を $P$ 数に狭める議論が成立しなくなるので、$\Sigma_1$ 論理式に関する数学的帰納法はネルソンの立場では正当化できない(40)。

数学的帰納法は自然数概念の唯一性の言いかえなので、数学的帰納法を制限することにより自然数概念が多様化する。この多様性は、モデル理論におけるペアノの数論のモデルの多様性とは異質のものである。標準的自然数概念を前提とせず、数学の研究の発展とともに自然数の概念が詳細化されていく自然数理論となっている。

(37) この種の高速な帰納法は限定算術 [9, 30] で公理として使われている。
(38) 脚注 (25) 参照
(39) 有界論理式 $\phi(x,y)$ を量化した $\exists x\phi(x,y)$ と論理同値な論理式を $\Sigma_1$ 論理式といい、$\forall x\phi(x,y)$ と論理同値となる論理式を $\Pi_1$ 論理式という。
(40) もちろん、この立場で正当化できなくても、それを公理とする $I\Sigma_1$ 理論を展開する自由を数学は持っている。

## 4.3 実際的には非可算な有限集合

有限集合 $X$ の要素数を $|X|$ と書く。「実際に数え上げることができる」ときに「実際的に可算」と言うことにすると、有限集合でも実際的には非可算なものがあることは明らかであるが、その様相を考察しておきたい。

集合の要素を数え上げる方法はいろいろある。原始的なものとしては、要素を一つ一つ数えていく方法がある。数えていくときに問題となるのは、数え終ったものを数え終っていないものから区別することと、これまでのところ何個まで数え終ったかを記録していくことである。

前者は、もしも要素を一列に並べることができれば、左端から初めて順に右に一つずつ移動すればよい。しかし、巣にむらがる蟻を数えるときや、コップの中の水の分子を数えるときなどは、要素を一列に並べることはできないので、印を付けていくことが必要となるが、印を付けることができないこともある。

後者は、数えるたびに記録紙に印を付け加えていけば良い。これは一進法で個数を表現していることになる。あるいは、新しい数を順に唱えることができれば集合の個数を数えることができる。わたしたちは十進法を使って数を順に唱える訓練を幼児期に受けているので、途中で気をそらさないで注意深く唱えていけば大きな集合でも要素数を数えることができる。

能率のよい数えかたはいろいろある。数える対象が固く手頃な大きさで実際に動かすこともできる場合には、要素を 10 個ごとにまとめて束にして、その束の数を数えて 10 倍し、残った端数を数えて加える、というものがある。このやりかたでは、束をさらに束にし、束の束をさらに束にする、という操作を使えば、具体的に数えることはわずかで済む。束に集める作業を複数の人が並行して行なえば、十進法で表現できるような個数の集合であれば数えることができると言えるだろう。

この方法は、集合の直積 $X \times Y$ の個数は $X$ の個数と $Y$ の個数の積となることを利用している。これが数の積の定義であると言うこともできる。しかし一進法で表される 2 数の積は、一進法で表現できるとは限らない。たとえば百万 10000000 は一進法で表現できるが、一京（$1000000 \times 1000000 = 1000000000000$）は一進法では表現はできないと言って良いだろう。このように、数え方も数の表記法と不可分の関係にある。

束にする数え方において、集合の大きさは量とみなされていると言うことができる。これを応用して、1 リットルのコップの中にある水の分子の数が約 $10^{23}$ 個程度あることが計測される。

要素数 $N$ の集合の部分集合の個数は $2^N$ 個ある。部分集合は、個々の要素を入

れるか入れないかの 2 通の選択肢を $N$ 回行うことで決るからである。この事実を使って集合を数えることはあるだろうか。たとえばドット数が $1000 \times 1000$ の白黒ディスプレイにおける画像全体の個数を知りたいと思えば $2^{1000000}$ 個あるとすぐにわかる。さらに、画像の分類法はどのくらいの個数あるかを知りたければ、$2^{2^{1000000}}$ 個あることになる。もしも、画像の分類法の分類法の全体の個数を知りたければ、$2^{2^{2^{1000000}}}$ 個となるが、このような問いが意味を持つことは想像が難しい。

集合論では、べき集合の構成や写像集合の構成はいくらでも繰り返すことができるので、

$$x^{\uparrow 0} = 1, x^{\uparrow y+1} = x^{x^{\uparrow y}}$$

で定義される超べき $x^{\uparrow y}$ に対応する集合は存在する。これは、「$\left\{ i \;\middle|\; 1 \leq i \leq x^{\uparrow y} \right\}$」という集合が「存在する」こととは異なる意義を持つ。

$$x^{\Uparrow 0} = 1, x^{\Uparrow y+1} = x^{\uparrow x^{\Uparrow y}}$$

で定義される「数」$x^{\Uparrow y}$ に対応する集合の構成はあるのだろうか。これは、有限集合を順序数として表現しておくとき、順序数の帰納法を使って $\alpha^{\Uparrow \beta}$ という順序数を定義できる。原始帰納関数で表示できる大きな数を個数とする有限集合は、有限順序数の構成を考えれば自明に存在することとなる。

しかし、具体的操作を繰り返して何かを構成するとき、一進法で表示可能な回数だけ「繰り返す」ことには明確な意味があるが、「一進法では表示できない回数だけ繰りかえす」ことには具体的な意味がなくなり「イデアルな操作」となる。イデアルな回数だけ繰り返して構成される有限集合は、実際的には非可算となる。スコーレムの定理が逆理ではないことについて、全単射の意味が制限されるので可算集合でも非可算となる、というように議論するが、それと同じである。

有限集合は原理的には全要素を列挙することができることになっていて、しかも、このことが無限集合と有限集合との違いの中で最も重要な点であると考えられている。しかし、一進法で表示可能な数という類の概念を数学に取りいれることにより、ある種の巨大な有限集合に、無限集合と同じ機能を持たせることが可能となる。

## 5　ミシェルスキーの公理系 FIN

この節と次の節で、有限概念の複数性を数学の基盤に取り入れる試みを紹介する。

J. ミシェスルキー [44] の FIN はペアノの自然数論[41]を以下のように修正した一階の理論[42]である。一階の言語 $\{\, o, S, +, \times \,\}$ に、2 べき関数 $2^x$ と定数記号 $\omega_r (r \in \mathbb{Q})$ を加えた言語をとる[43]。$\omega_r$ を巨大定数と呼ぶ。

ペアノの公理を以下のように修正する。違いは二番目の公理に「$x$ が次の数 $Sx$ と異なるとき」という制約条件を付けた点である。

**公理 5.1** $\neg(Sx = o)$

**公理 5.2** $S(x) \neq x \wedge S(y) \neq y \wedge S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$

**公理 5.3 (数学的帰納法)** 自由変数 $x$ を含む論理式 $P$ について、

$$P(o) \wedge \forall x (P(x) \Rightarrow P(Sx)) \Rightarrow \forall x P(x).$$

$+, \times$ についての公理は同じ：

**公理 5.4** $x + o = x,\ x + Sy = S(x + y),$

**公理 5.5** $x \times o = o,\ x \times Sy = x \times y + x,$

$2^x$ についての公理

**公理 5.6** $2^o = So,\ 2^{Sx} = 2^x + 2^x.$

大小関係 $<$ は通常の定義を修正し以下のように定義する。

**公理 5.7** $x < y \Leftrightarrow x \neq S(x) \wedge \exists z[x + S(z) = y]$

すなわち、$x$ が次の数 $S(x)$ と異なり $x + S(z) = y$ となる $z$ が存在することと定義する。定義より次がすぐに示せる[44]。

---

[41] 脚注 (13) 参照
[42] 脚注 (9) 参照
[43] $\mathbb{Q}$ は「便宜的に」使われているだけで、実際に必要になる有限個の $\omega_r$ だけあればよい。
[44] 通常の証明を形式的証明に直す作業は省く。

**命題 5.1** *(i)* $x < y$, $x = y$, $x > y$ のいずれかが成立し、どの *2* つも同時には成立しない。
*(ii)* $Sx = x$ ならば、$x = y \vee y < x$ がすべての $y$ について成立する。
*(iii)* $Sx = x$ となる $x$ は高々一つしかない。

証明　(i) 帰納法により、$x < y$,$x = y$,$x > y$ のいずれかが成立することが証明できる。これらのなかの 2 つが同時には成立しないことは明らか。

(ii) $Sx = x$ ならば $x < y$ は定義より成り立たない。従って $x = y$ または $y < x$ となる。

(iii) $Sx = x, Sy = y$ とすると、$x < y$ も $y < x$ も成り立たないので、$x = y$ となる。 ∎

以上から、$Sx = x$ となる $x$ が存在すれば、それは最大数であることがわかる[45]。

$\omega_s (s \geq r)$ を含まない定数項 $t$ ごとに、次を公理とする：

**公理 5.8 (巨大性公理)** $t < \omega_r$.

$\omega_r$ より質的に小さい数をどのように使って新しい数を作っても $\omega_r$ より小さい、ということを意味する公理で、$\omega_s$ $(s < r)$ に対する $\omega_r$ の巨大性を表現する。これから次がわかる：

**補題 5.2** $x, y < \omega_p$, $p < q$ ならば、$x + y, x \times y, 2^x < \omega_q$.

**定理 5.3** ペアノの公理系が無矛盾ならば *FIN* は無矛盾である。

証明　コンパクト性定理[46] により、FIN の公理の中の有限個 $\Gamma$ についてモデルを構成すればよい。

自然数 $n > 0$ を固定し、FIN の記号を $X = \{ 1, 2, \cdots, n \}$ 上に解釈する：

- $S^*(a)$ は、$a < n$ のとき $a + 1$, $a = n$ のとき $n$,
- $a +^* b$ は、$a + b \leq n$ のとき $a + b$、それ以外では $n$

[45] しかし最大数が存在することは公理にないので、FIN では最大数は明示的な役割は果しえない。
[46] 論理式の集合 $\Gamma$ から $P$ が導かれるとき、$\Gamma$ の有限部分集合 $\Gamma_0$ から $P$ が導かれる。したがって、$\Gamma$ の有限部分がすべて無矛盾ならば、$\Gamma$ も無矛盾となる。

- $a \times^* b$ は、$a \times b \le n$ のとき $a \times b$、それ以外では $n$.
- $2^a$ の解釈は、$2^a \le n$ のときは $2^a$ そうではないときは $n$.

この解釈において巨大性公理以外は明らかに成り立つ。

$\omega_p$ の解釈は以下のように行う。途中で必要に応じ $n$ を大きくとりなおす。

$\Gamma$ に含まれる巨大性公理の右辺に出てくる $\omega_p$ の添字を $p_1 < \cdots < p_k$ とする。$t < \omega_{p_1}$ となる項 $t$ が有限個あるが、それらの中に出現する巨大定数を $\omega_{r_1}, \cdots, \omega_{r_k}$ とすると $r_j < p_1$。そこで、自然数 $\omega^*_{r_1}, \cdots, \omega^*_{r_k}$ を任意に選び、左辺の $t$ に出現する $\omega_{r_j}$ に $\omega^*_{r_j}$ を代入して得られる有限個の自然数の最大値に 1 を加えて $\omega^*_{p_1}$ とする。次に、$\Gamma$ に含まれる $t < \omega_{p_2}$ という公理を考える。$t < \omega_{p_2}$ の $t$ に新たに登場する $\omega_r$ について $\omega^*_r$ を任意に選ぶ。これらを $t$ の巨大定数に代入してえられる自然数の中で最大のものに 1 を加えて $\omega^*_{p_2}$ とする。以下同様に、$\Gamma$ に登場する巨大定数を解釈する。以上に登場しない巨大定数の解釈は任意とする。以上の解釈が、$\Gamma$ を満すことは明らか。 ▮

無限公理を除いた集合論はペアノの公理系に実現できる。その方法はそのまま FIN に使える。

**定義 5.1** 二項関係 $x \in y$ を、$y$ の二進展開の第 $x$ 位が 1 であることと定義する。すなわち、

$$x \in y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists z, t[y = z \times 2^{S(x)} + 2^x + t \quad \wedge \quad t < 2^x].$$

$x \in y$ が正しいとき、$x$ を $y$ の要素と呼ぶ。定義から、$y \in 2^x \Leftrightarrow y = x$ となる。すなわち $2^x = \{\, x \,\}$. また、$x \neq y$ ならば $\{\, x, y \,\} = 2^x + 2^y$. 一般に、$\{\, x_1, \cdots, x_p \,\}$ を $x_1, \cdots, x_p$ を要素とする数を表すとき、$x_1, \cdots, x_p$ が相異なるならば

$$\{\, x_1, \cdots, x_p \,\} = 2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_p}.$$

たとえば、$0 = \emptyset$,$1 = \{\, 0 \,\}$,$2 = \{\, 1 \,\}$, $3 = \{\, 0, 1 \,\}$, $4 = \{\, 2 \,\}$, $5 = \{\, 0, 2 \,\}$, $6 = \{\, 1, 2 \,\}$, $7 = \{\, 0, 1, 2 \,\}$, $8 = \{\, 3 \,\}$。

**補題 5.4** *(i)* $x \in y$ となる $x$ の最大値を $\max(y)$ とすれば $y \le 2^{\max(y)+1}$.
*(ii)* $y$ の要素数を $|y|$ とすると、$|y| \le \log(y+1) - 1$. ただし、$\log(y) := \max\left\{\, x \;\middle|\; 2^x \le y \,\right\}$。
特に $|y| \le y$

証明 . (i) $y$ の二進数表示は $\max(y)$ 桁となるから。
(ii) $y \ge y_0$, ただし、$y_0 = \{\, 1, 2, 3, \cdots, |y| \,\} = 2^{|y|+1} - 1$. 従って、

$$|y| = \log(y_0 + 1) - 1 \le \log(y + 1) - 1.$$

∎

二数の二進展開が一致すれば等しいので外延性公理が示せる。

**定理 5.5**

$$\forall x[x \in y \Leftrightarrow x \in z] \Rightarrow y = z.$$

これは、数学的帰納法で証明できる。

内包性公理に相当するものとして次が成り立つ：

**定理 5.6** $p < q$ とする。論理式 $\psi$ に対し $\psi(y)$ を満す $y < \omega_p$ を要素とする数 $x < \omega_q$ が存在する。この数を $\left\{ y < \omega_p \,\middle|\, \psi(y) \right\}$ と書く。

**証明.** $z$ についての命題：$z \leq \omega_p$ ならば

$$y \in x \Leftrightarrow y < z \ \wedge \ \psi(y)$$

が任意の $y$ について成り立つような $x < \omega_q$ が存在することを $z$ についての帰納法で示す。

$z = 0$ では、$y < 0$ となる $y$ はないので、$x = 0$ が条件を満す。

$z = z_0 < \omega_p$ で成立しているとする。すなわち、

$$y \in t \Leftrightarrow y < z_0 \wedge \psi(y)$$

となる $t < \omega_q$ が存在すると仮定する。$\psi(z_0)$ が真のとき、$x = t + 2^{z_0}$, そうでないとき、$x = t$ と定義すると、$x < \omega_q$ であり、しかも

$$y \in x \Leftrightarrow y < S(z_0) \ \wedge \ \psi(y)$$

を満す。したがって $z = S(z_0)$ でも主張が成立する。従って $z = \omega_p$ でも成立し、

$$y \in x \Leftrightarrow y < \omega_p \wedge \psi(y)$$

となる $x < \omega_q$ が存在することがわかる。 ∎

$x$ のべき集合 $\mathbf{pow}\,(x)$ が存在し、$x < \omega_p$,$p < q$ ならば $\mathbf{pow}\,(x) < \omega_q$ となることが次からわかる：

**定理 5.7** $x < \omega_p$ で、$p < q$ ならば、$\forall z[z \in y \Leftrightarrow z \subset x]$ となる $y < \omega_q$ が存在する、ただし、$z \subset x$ は $\forall u[u \in z \Rightarrow u \in x]$ の略記。

証明　$\psi(z) := \forall t[t \in z \Rightarrow t \in x]$ と定義すると、上の定理より、

$$\forall z[z \in y \Leftrightarrow z \ < \ \omega_p \wedge \psi(z)]$$

となる $y \ < \ \omega_q$ が存在する。ところが、$z \subset x$ ならば $z \leq x \ < \ \omega_p$ より $z \ < \ \omega_p \wedge \psi(z)$ は $\psi(z)$ と同値。したがって、$\forall z[z \in y \Leftrightarrow \psi(z)]$ となる $y \ < \ \omega_q$ が存在する。 ∎

これより、$x, y \ < \ \omega_p$ かつ $p < q$ のとき、$\{ x, y \} \ < \ \omega_p$ が定義でき, 順序対 $(x, y) := \{ x, \{ x, y \} \} \ < \ \omega_q$ も定義できる。

さらに

**定理 5.8** $x, y \ < \ \omega_p$ のとき、直積集合 $x \times y \ < \ \omega_q$ が定義される。

証明. $\psi(z) = \exists u, v[u \in x \wedge v \in y \wedge z = (u, v)])$ と定義すると

$$x \times y = \left\{ z \ \middle| \ \psi(z) \right\}.$$

$\psi(z)$ が真ならば $u \in x$, $v \in y$ により $z = (u, v)$ とかける。$\varepsilon = q - p > 0$ と置くと、

$u, v \ < \ \omega_p$ より $z \ < \ \omega_{p+\varepsilon/2}$。よって、

$$x \times y = \left\{ z \ \middle| \ \psi(z) \right\} = \left\{ z \ \middle| \ z \ < \ \omega_{p+\varepsilon/2} \wedge \psi(z) \right\} \ < \ \omega_q.$$

$x, y \ < \ \omega_p$ の間の関係 $r \subset x \times y$ は、$p < q$ のとき $r \ < \ \omega_q$ を満す。特に、写像 $f : x \to y$ も $f \ < \ \omega_q$ を満す。

FIN により巨大集合 $\omega_p$ を持つ集合論が得られる。

任意の正の有理数 $\varepsilon$ について $x < \omega_{p+\varepsilon}$ がなりたつことを $x < \omega_{p+}$ と書くとき、

$$\left\{ x \ \middle| \ x < \omega_{p+} \right\}$$

は $S$ で閉じた集まりとなり数学的帰納法が成り立たないように見える。しかし、$x < \omega_{p+}$ は、論理式 $x < \omega_{p+1/n}(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の「無限連言」であり、FIN の論理式ではないので、数学的帰納法を $n$ の性質「$n < \omega_{p+}$」に適用はできない。しかし、このクラスは有限集合 $\{ 1, \cdots, \omega_{p+1} \}$ に含まれている。有限集合に含まれるこのようなプロパークラスは次節に登場する半集合の典型例となる。

# 6 ヴォペンカの半集合論

通常の集合論ではプロパークラス(47) が集合に含まれることはありえない。P. ヴォペンカはそのようなクラス（半集合(48) ）を導入することで有限集合論の中で「無限」を捕えて超準数学に相当することを実現できることを示した。半集合論の初等性は、超準数学が無限集合とは独立しているという A. ロビンソンの指摘 (§2.5) を裏書きしていると考えることもできるだろう。

## 6.1 半集合論の公理

**集合論** まず所属関係を表す二項関係 “$\in$” からスタートし用語や記号を増やしていく。

**公理 6.1 (外延性公理)** $x \in X$ と $x \in Y$ が論理同値ならば $X = Y$,

**公理 6.2 (空集合の存在公理)** $\forall x[x \notin \emptyset]$ となる集合 $\emptyset$ がある。

**公理 6.3 (次集合公理)** 集合 $x, y$ に対し $x$ に $y$ を要素として付けくわえた集合 $x \bigcup \{\, y \,\}$ が存在する。

集合についての条件 $P$ が帰納的であるとは

- 空集合 $\emptyset$ は条件 $P$ を満し、
- 集合 $x$ が条件 $P$ を満すならば次集合 $x \bigcup \{\, y \,\}$ も条件 $P$ を満す

(47) 脚注 (20) 参照

(48) 半集合は集合論の最も基本的なレベルに位置する概念で、筆者には予想外のもので印象深かった。しかし振り返えれば、超準数学では半集合が重要な役割を果している。この点を簡単に説明しておきたい。

超準数学ではどの数学的対象にも標準的という修飾語をつけることができる。たとえば、標準的な自然数、標準的な集合、標準的な写像など。しかし「標準的」という概念を用いて定義される性質により集合を定義してはならない。この規約を無視し、たとえば、標準的ではない自然数全体のなす集合を考えてみよう。その最小元を $x$ とすると $x-1$ は標準的なので $x=(x-1)+1$ は標準的数の和となって標準的となる。これは矛盾。このように、上の規約を無視した推論は無意味な結果をもたらすことがある。

非標準的な数の一つを $w$ とするとき、標準的な数は「有限集合」$\{\, x \mid 1 \leq x \leq w \,\}$ の要素となる。したがって標準的な数がなすクラス $\{\, x \mid x \text{ は標準的} \,\}$ は有限集合 $\{\, x \mid 1 \leq x \leq w \,\}$ に含まれるが部分集合ではない。

ことを言う。

**公理 6.4 (集合帰納法)** 条件 $P$ が帰納的ならばすべての集合が条件 $P$ を満す。

これらの公理により、ツェルメロ・フレンケルの公理系は、無限公理を除いて証明できる。したがって、順序対・直積・関係・写像等々、通常の素朴集合論で使う概念や道具は用意できる。集合 $x, y$ の間に全単射があるとき $x \simeq y$ とかく。

**命題 6.1** 写像 $f : x \to x$ が単射なら全射である。

証明. $x$ についての帰納法で示す。$\emptyset$ については明らかに成り立つ。集合 $x$ について成り立つと仮定するとき、$y \notin x$ ならば $x \bigcup \{ y \}$ についても成り立つことを示す。

$f$ を $x \bigcup \{ y \}$ の自己写像とする。$y \notin \mathrm{Im}(f)$ ならば $f|x : x \to x$ となり、仮定より、$f|x$ は全射となる。従って、$f(a) = f(y)$ となる $a \in x$ が存在することになり $f$ の単射性と矛盾する。

$y = f(b)$ となる $b \in x$ があるとする。$g : x \to x$ を $g(b) = f(y)$ 、$a \neq b$ のとき $g(a) = f(a)$ と定義すると単射なる。従って帰納法の仮定より全射となり、これより $f$ の全射性がわかる。 ∎

**系 6.2** $y \notin x$ のとき $x \not\simeq x \bigcup \{ y \}$.

**定理 6.3** どの集合の上にも最大元と最小元を持つ離散的な線形順序がある。

証明 これも帰納法で示す。$\emptyset$ については明らか。$x$ 上に最大限と最小元を持つ離散的な線形順序 $e \subset x \times x$ があるとする。$y \notin x$ とする。このとき、

$$e^* \subset x \bigcup \{ y \} \times x \bigcup \{ y \}$$

を、

$$e^* = e \bigcup \left\{ (a, y) \;\middle|\; a \in x \right\} \bigcup \{ (y, y) \}$$

と定義すれば、明らかに離散的な線形順序であり、$y$ が新しい最大元となる。 ∎

したがって、この公理系における集合は、普通の集合論における有限集合に近いものであることがわかる。しかし、半集合の概念を導入することにより、この中で「無限」を論じることができるようになるのである。

**クラスの導入**　ここで新たに述語記号 Class$(X)$（「$X$ はクラスである」と読む）と Set$(X)$（「$X$ は集合である」と読む）を導入する。普通の変数として大文字 $X, Y, Z, ...$ を用い、小文字 $x, y, z, ...$ は集合を動く変数を表し、$\forall x P(x)$ は

$$\forall X[\mathrm{Set}(X) \Rightarrow P(X)],$$

すなわち、すべての集合 $X$ について $P(X)$ が成り立つ、を意味するとし、$\exists x P(x)$ は

$$\exists X[\mathrm{Set}(X) \wedge P(X)],$$

すなわち、ある集合 $X$ について $P(X)$ が成り立つ、と意味するとする。量化記号が $\forall x, \exists x$ のみである論理式を集合論理式と呼ぶ。

以上の準備の下で、以下のような公理を追加する：

**公理 6.5** $\forall x[Class(x)]$, すなわち集合はクラスである。

**公理 6.6** $\forall X \forall Y[X \in Y \Rightarrow Set(X)]$, すなわち、クラスの要素は集合である.

**公理 6.7 (外延性公理)** $\forall x[x \in X \Leftrightarrow x \in Y] \Rightarrow X = Y$。 すなわち、クラス $X$ と $Y$ が同じ要素をもてば同じクラスである。

**公理 6.8 (内包性公理)** 集合論理式 $\varphi(x)$ に対し、

$$\exists Z \forall x[x \in Z \Leftrightarrow \varphi(x)].$$

すなわち、$\varphi(x)$ を満す集合 $x$ の全体はクラスとして存在する。

外延性公理によりこのクラスは確定するので、これを $\left\{ x \;\middle|\; \varphi(x) \right\}$ と表す。

集合ではないクラスをプロパークラスという。集合の全体 $V := \left\{ x \;\middle|\; \mathrm{Set}(x) \right\}$ をユニバーサルクラスと呼ぶ。これが集合であるとすると $V \in V$ となるが、正則性定理によりこのようなことはない。したがって $V$ はプロパークラスである。

クラスについても、合併・交わり・直積・関係・写像等が定義される。集合 $x, y$ の間に全単射クラス（グラフがクラスであるような全単射）が存在するとき $x \approx y$ と書く。$x \approx y$（クラスとして同型）であるが $x \not\simeq y$ （集合としては同型でない）場合がある（定理 6.6）。

半集合　集合に含まれるクラスを半集合と呼ぶ。すなわち次の論理式を満すクラスが半集合である：

$$\mathrm{SemiSet}(X) := \exists x\ [\ X \subseteq x\ ].$$

集合ではない半集合を真半集合という。

**公理 6.9** 真半集合が存在する、すなわち

$$\exists X\ [\ \mathit{SemiSet}(X)\ \wedge\ \neg \mathit{Set}(X)\ ].$$

半集合は種々の構成法で閉じていることが容易に示せる：

**定理 6.4** $X,Y$ が半集合ならば次も半集合となる：$X \bigcap Y$, $X \bigcup Y$, $X \setminus Y$, $X \times Y$, $X \bigcup Y$,

$$P(X) := \left\{\ y\ \middle|\ y \subseteq X\ \right\},$$

$$\mathit{Dom}(X) := \left\{\ x\ \middle|\ (x,y) \in X \text{ となる } y \text{ がある }\right\},$$

$$\mathit{Img}(X) := \left\{\ y\ \middle|\ (x,y) \in X \text{ となる } x \text{ がある }\right\},$$

$$X^{-1} := \left\{\ (x,y)\ \middle|\ (y,x) \in X\ \right\},$$

$$Y''X := \left\{\ u\ \middle|\ (u,x) \in Y \text{ となる } x \in X \text{ がある }\right\}.$$

証明. 各クラスを含む集合を構成すればよい。たとえば、クラス $X$ が半集合であり $X \subset a$ とすると $P(X) \subset P(a)$ となるので、クラス $P(X)$ は半集合となる。 ▮

## 6.2　有限集合の再定義

先に述べたように、この理論における集合は通常の有限集合に近い性質を持つ。しかし以下のように有限集合と無限集合とを定義することができる。

クラス $X$ が有限であるとは、$X$ の部分クラスがすべて集合であることと定義し $\mathrm{Fin}(X)$ と書く。有限なクラスは、それ自身が集合であるだけでなく部分クラスもすべて集合であるような集合である。

真半集合の存在公理により有限ではない集合が存在する。このような集合を無限集合と呼ぶ。

有限集合の例として、空集合や一点集合 $\{\,x\,\}$ などがある。2つの有限集合の合併が有限であることは容易に証明できる。

有限集合についての以下のような帰納法が成立する。

**定理 6.5** クラス $Z$ が空集合を含み、$x \in Z$ ならば $x \bigcup \{\,y\,\} \in Z$ という条件を満すとき、すべての有限集合を含む。

クラス $Z$ は集合用論理式で定義されているとは限らないので集合帰納法は使えない。半集合論における議論の例示として定理を証明しよう。

証明：$x$ を有限集合とする。定理 6.3 より、$x$ 上にはグラフが集合であるような離散線型順序 $\leq$ がある。$x$ の元 $z$ で

$$\left\{\, u \,\middle|\, u \leq z \,\right\} \in Z$$

となるもの（$x$ が有限なので左辺は集合となっていることに注意）を集めたクラスを $Y \subset x$ とすると、これも集合である。

$Y = x$ であれば $\max(x) \in Y$ より

$$x = \left\{\, y \,\middle|\, y \leq \max(x) \,\right\} \in Z$$

となる。

そこで $Y \neq x$ と仮定して矛盾を導く。$x \setminus Y$ の最小元を $y$ とする。$y$ の直前の元 $y^-$ は $y^- \in Y$ となるので、

$$\left\{\, w \,\middle|\, w < y \,\right\} = \left\{\, w \,\middle|\, w \leq y^- \,\right\} \in Z.$$

したがって、$Z$ についての条件より

$$\left\{\, w \,\middle|\, w \leq y \,\right\} = \left\{\, w \,\middle|\, w < y \,\right\} \bigcup \{\,y\,\} \in Z$$

となり $y \in Y$ となる。これは矛盾。 ∎

系 6.2 より $y \notin x$ のとき、$x \bigcup \{\,y\,\}$ と $x$ とは全単射とはならないが、全単射クラスならば存在することがある。実際、デデキントの無限集合の特徴付けと同様の特徴付けが「無限」集合についても成り立つ。

**定理 6.6** $x$ が無限集合であることの必要十分な条件は $x \approx x \cup \{\,y\,\}$ となる $y \notin x$ が存在することである。もしも $x$ が無限集合ならば任意の $y \notin x$ について $x \approx x \cup \{\,y\,\}$ となる。

**証明.** 全単射クラス写像 $F : x \to x \cup \{ y \}$ $(y \notin x)$ があるとする。$x$ が有限集合だとすると、$x \cup \{ y \}$, $x \times (x \cup \{ y \})$ も有限集合となる。従って、同型クラス $F : x \to x \cup \{ y \}$ は同型写像となる。このとき、逆写像を $x$ に制限したものは単射であるが全射ではないので矛盾。

$x$ が無限集合であるとし、$y \notin x$ とする。$x$ に離散全順序関係 $\leq$ を入れる。

$$x_f := \left\{ y \in x \,\middle|\, \left\{ u \,\middle|\, u \leq y \right\} \text{は集合} \right\} \subset x$$

と定義すると $x$ は無限なので $\max(x) \notin x_f$ より $x_f \neq x.$ もしも $z \in x_f$ ならば直前の要素 $z^-$ も $x_f$ に属している。また $z \neq \max x$ より直後の要素 $z^+$ があるが、これも $x_f$ に属している。従って、写像クラス

$$g : x_f \to x_f \cup \{ y \}$$

を $g(\min(x)) := y$, $z \neq \min(x)$ ならば $g(z) := z^-$ と定義すると $g$ は全単射となる。そこで、写像クラス $G : x \to x \cup \{ z \}$ を $x_f$ 上では $g$,$x_f$ の補集合上では $G(u) = u$ と定義すると全単射となる。なお写像クラス $G$ が写像とはならないのは、クラス $x_f$ が「集合である」という性質を使って定義されているので集合にはならないからである。 ∎

## 6.3 可算半集合

半集合が可算であることを定義する。

線形順序クラス $\{ A, \leq \}$ が、

1. どの $a \in A$ についても切片 $\left\{ y \in A \,\middle|\, y \leq a \right\}$ は有限集合、
2. $A$ はプロパークラス

という条件を満すとき $\omega$-型であるという。2 つの $\omega$-型順序クラスの間には順序同型クラスが存在することがわかる。

$\omega$ 型の線形順序クラスを持つクラスのことを可算クラスと呼ぶ。

可算クラスの真部分集合は有限であることがわかる。

無限集合 $y$ に線型順序を入れ、$\left\{ x \in y \,\middle|\, x \leq z \right\}$ が有限となる $z$ の全体のなすクラスを考えると、これは $\omega$ 型の順序クラスとなる。従って可算クラスは半集合となる。

可算クラスの直積・直和・べきクラスは可算である。ただしべきクラスは部分集合の全体であり、これは、通常の集合論では、可算集合の有限部分集合の全体が可算集合となることに対応する。

## 6.4 自然数

集合 $x$ 上の二項関係 $\in$ が整列順序となるとき $x$ は自然数であるという。$N$ を自然数のクラスとし有限な自然数の全体のクラスを $FN$ とすると $(FN, \leq)$ は $\omega$ 型の順序となる。

半集合論では、自然数全体は真半集合となり集合にはならないが、有限自然数と無限自然数の二種類があるので超準数学を実質的に展開できる。

半集合に集合論的構成を適用した結果が半集合であることが多い。数学で行われる集合論的構成や議論の多くはクラスとしての構成であり、構成されたクラスが集合であることを使わないことも少くないので、通常の議論がそのまま半集合論でも妥当することが少くない。しかし、実数論のように、半集合を要素とするクラスや集合を考えたい場合には個別の工夫が必要となる。

半集合論では通常の集合論では定式化しにくい概念を導入することが可能となるが、これ以降の展開についてはヴォペンカ [61] を参照していただきた。

## 6.5 自然数全体が半集合となることの影響

現行の数学において、自然数全体が集合となることに強く依存しているところをいくつか指摘したい。

### 6.5.1 $\Sigma_1$ 集合

$\Sigma_1$ 集合(49) は、計算的に列挙可能な集合 (再帰的枚挙可能集合) と呼ばれている集合や、形式系における形式的定理の全体がなす集合などが典型例である。これは集合の族 $X_0, X_1, X_2, \cdots$ の合併 $\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ と書くことができるが集合となるとは限らない。たとえば $X_i = \{\, i \,\}$ ならば $\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ は自然数の全体となるが、これは集合ではない。

(49) 所属条件が、$\Sigma_1$ 論理式で表現されている集合を $\Sigma_1$ 集合という。

二項関係 $R$ に対し、推移的閉包 $R^*$ は、自然数 $n$ と $x_1, \cdots, x_n$ が存在して

$$xRx_1, x_1Rx_2, x_2Rx_3, \cdots x_{n-1}Rx_n, x_nRy \tag{1}$$

となるときに $xR^*y$ であるとして定義される。$n \leq k$ について (1) が成り立つ関係 $R_k$ は集合となるが、この合併である $R^* = \bigcup_k R_k$ が集合となる一般的根拠はない。すなわち、二項関係の推移的閉包は関係クラスとしては定義されるが関係となるとはならない。

二項関係の推移的閉包をつくる構成は、グラフにおける連結性の定義や、二項関係から同値関係や順序関係を定義するときに不可欠であるし、書換え規則による書換えや推論規則に基く証明等の定義はこの構成に依存している。通常は推移的閉包の操作は唯一つしかないが、半集合論では有限的閉包と無限的閉包に分岐する。

同値関係の多くはクラスとなるので「同値類」が集合となるとは限らない。そのため、「同値類」全体はクラスとしても定義はできなくなる。従って商集合の構成は個別に工夫が必要となる。

有限集合 $\Sigma$ をアルファベットとする語の全体 $\Sigma^*$ は半集合であるが集合とはならなず、文法で定義される形式言語が集合をなす一般的な理由はない。

特に、形式言語としてとらえられる「定理の全体」も集合とはならない。また、2 つの論理式の論理同値性も半集合関係となる。実際、論理式 $\varphi, \phi$ の論理同値性は $\varphi \Leftrightarrow \phi$ の証明可能性であるから。したがって、クラスを論理式の論理同値類としてとらえることはできない。

また、計算可能性の概念も同様である。$\Sigma_1$ 集合である再帰的枚挙可能集合だけでなく、$\Delta_1$ 集合[(50)] である再帰的集合も半集合となる。

多くの代数的構造も半集合となる。たとえば多項式環は係数体が有限であっても集合とはならない。次数が $n$ 以下の多項式の全体 $k_n[x]$ は有限集合だが合併である多項式環 $k[x]$ はクラスとなる。

### 6.5.2 実数

無限数列 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ は集合論的には写像 $f : FN \to FN$ $(f(i) = x_i)$ として考えるが、$FN$ が半集合であるため $Graph(f) \subset FN \times FN$ も半集合となる。数

[(50)] $\Sigma_1$ 式であると同時に $\Pi_1$ 式であるような論理式を $\Delta_1$ 論理式という。$\Delta_1$ 論理式で所属関係を表現できる集合を $\Delta_1$ 集合という。

列自身がプロパークラスであるため、数列の全体を素朴に考えることはできなくなる。

しかし、半集合論では無限自然数があるので、その一つ $\omega$ を固定し、$\omega$ 桁の二進数 $(x_1, x_2, \cdots, x_\omega)$ の全体がなす集合 $\{0, 1\}^\omega$ に、徐々に精密になる同値関係の系を入れることにより実数を捕捉することができる。たとえば、$\{0, 1\}^\omega$ 上の同値関係 $R_k$ を

$$xR_ky \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall i \le k\,[x(i) = y(i)]$$

と定義すると、$R_1 \supset R_2 \supset \cdots$ となり、実数としての同一性は

$$x = y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \text{任意の } k \text{ について } xR_ky$$

となる。しかし $\bigcap_i R_i$ は一般にはクラスでしかないので、実数としての 2 進数の同一性関係はクラスでしかない。

以上の点から、自然数が集合をなさないならば通常の数学が展開できないように見える。しかし、不定性を内包する実数や計算可能性や証明可能性のような概念を無理に確定する基盤が失われる一方、有限概念の複数性を数学的に素朴なレベルで定式化することが可能となり、超準数学の諸道具を数学の基本に組みこむことが可能となるように思われる。

有限概念の複数性に基づいた数学を展開する作業は多くの試行錯誤が必要である。それを通して、現代数学とは異質な数学が成長することが期待される。

# 結語

郡司氏の論説 [66] を通して複雑系の基本的課題は複雑性の理解ではなく不定性の理解にあると筆者は考えるようになった [70] が、そこで問題となる不定性は、確実性と表裏一体となっている不定性である [71]。自然数 1 の確実性や自然数集合 $\mathbb{N}$ の確実性がもつ不定性を了解することと、生命系における創発性の諸問題を了解することとは同質のことであると考えられるのである。しかし、不定性がないことを規範とする現行の数学は、そのような不定性を理解するには不適切な場である一方、誤解なく理解するのには適切な場でもある。この小論では数 1 の確実性がもつ不定性 [65] よりは筆者には近づきやすい $\mathbb{N}$ の確実性がもつ不定性をテーマにした。

自然数集合 $\mathbb{N}$ は現代数学の礎石の一つである。そこには証拠なしに信じる信仰の様相すらあるが、この信仰をバネに 20 世紀数学は爆発的に発展した。しかし、複雑系に関心を持つ他分野の研究者との交流を通して気付かされた数学の偏よりは予想外に深いものであった。しかし、振り返って見ると、この偏よりを意識した研究活動は 20 世紀を通して細々とながらも連綿と続けられてきていたのである。

今後も数学が学問としての意義を保ち進展し続けるとすれば、全く新しい地平が出現するに違いない。ここで取り上げたことは現在でもわかっている方向でしかないが、カントールの楽園からの出口 (§2.2 参照) の一つではある。この楽園の外に出て歩き始めることは余りに無謀なことではあろう。しかし、無謀にも見える試みを通して不定性への感性が数学界に徐々に甦えることにより複雑系と数学との関係が深まる、と考えている。

# 参考文献


[1] John C. Baez and James Dolan. Higher-dimensional algebra iii: $n$-categories and the algebra of opetopes. *Adv. Math.*, 135:145–206, 1998.

[2] Jon M. Beck. Simplicial sets and the foundations of analysis. In *Proceedings of Conference on Sheaf Theory,Durham,England(July 1977)*, volume 753 of *Lecture Notes in mathematics*, pages 113–124. Springer, Berlin, 1979.

[3] Jon M. Beck. On the relationship between algebra and analysis. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 19:43–60, 1980.

[4] P. Bernays. On platonism in mathematics. In *P.Benacerraf and H.Putnam, editors, Philosophy of Mathematics*, pages 258–272. Cambridge University

Press, Cambridge, second edition, 1983. Originally appeared in Frech in L'Enseignement Mathematique,1935,pp.52-69.

[5] George Boolos. A curious inference. In Richard Jeffrey, editor, *Logic,Logic, and Logic*, pages 376–382. Harvard University Press, London, 1998. ISBN 0-674-53767-X.

[6] Emil Borel. *Les Nombres Inaccessibles.* Gauthier-Villars, 1952.

[7] Samuel R. Buss, editor. *Handbook of Proof Theory*, volume 137 of *Studies in Logic and the Foundation of Mathematics.* Elsevier, Amsterdam, 1998. ISBN 0-444-89840-9.

[8] Samuel R. Buss. Bounded arithmetic, proof complexity and two papers of parikh. *Annals of Pure and Applied Logic*, 96:43–55, 1999.

[9] S.R. Buss. *Bounded Arithmetic.* Bibliopolis, 1986. Revision of 1985 Princeton University Ph.D. thesis.

[10] S.R. Buss. On godel's theorem on lengths of proofs i:number of lines and speed up for arithmetics. *Journal of Symbolic Logic*, 59:737–756, 1994.

[11] A. Carbone and S. Semmes. Making proofs without modus ponens:an introduction to the combinatorics and complexity of cut elimination. *Bullentin AMS*, 34(2):131–159, 1997.

[12] Felice Cardone. Strict finitism and feasibility. In Daniel Leviant, editor, *Logic and Computational Complexity,International Workshop LCC '94, Indianapolis, IN, USA, October 13-16,1994*, volume 960 of *Lecture notes in computer science*, pages 1–21, 1994.

[13] C.C. Chang and H. Jerome Keisler. *Model Theory*, volume 73 of *Studies in Logic and the Foundation of Mathematics.* Elsevier, Amsterdam, 3rd edition, 1989. First edition 1973.

[14] E.A. Cichon. A short proof of two recently discovered independence results unsing recursion theoretic methods. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 87:704–706, 1983.

[15] F.R. Drake. How recent work in mathematical logic relates to the foundations of mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, 1985.

[16] M.E. Dummett. Wang's paradox. *Synthese*, 30:301–324, 1975.

[17] Michael Dummett. *Elements of Intuitionism.* Clarendon Press, second edition, 2000. ISBN 0-19-850524-8.

[18] A.S. Essenin Volpin. The ultra-intuitionistic criticism and the anti-traditional programme for foundations of mathematcs. In A. et al Kino, editor, *Intuitionism and Proof Theory*, pages 3–45. North-Holland,Amserdam, 1970.

[19] Baire et alii. Five letters on set theory, 1905. In *From Kant to Hilbert:A Source Book in the Foundations of Mathematics*, pages 1077–1086. Clarendon Press, 1996. ISBN 019850537X.

[20] R.O. Gandy. Limitations to mathematical knowledge. In D. et al van Dalen, editor, *Logic Colloquium '80*, pages 129–146. North-Holland, 1982.

[21] J.R. Geiser. A formalization of essenin-volpin's proof theoretic stuies by means of non-standard analysis. *Journal of Symbolic Logic*, 39(1):81–87, 1974.

[22] G. Gentzen. Die widerspruchsfreiheit der rinen zahlentheorie. *Math. Ann.*, 112:493–565, 1936.

[23] Nicolas D. Goodman. Reflections on bishop's philosophy of mathematics. In F.Richman, editor, *Constructive Mathematics,Proceedings of the New Mexico State University Conference Held at Las Cruces, New Mexico, August 11–15,1980*, volume 873 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 135–145. Springer, 1980. Reprinted in Computability—Computable functions, logic, and the foundation of mathematics, by R.L.Epstein et al, pp. 254–258.

[24] R.L. Goodstein. On the restricted ordinal theorem. *Journal of Symbolic Logic*, 9(2):33–41, 1944.

[25] David Hilbert. On the infinite. In Walter A. Carnielli Richard L. Epstein, editor, *Computability—Computable functions, Logic, and the Foundation of Mathematics*, The Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, pages 45–58. Pacific Grove, California, 1989. ISBN 0-534-10356-1.

[26] Dominic Hyde. Sorites paradox. `http://plato.stanford.edu/entries/sorites-paradox/`.

[27] David Isles. Remarks on the notion of standard non-isomorphic natural number series. In F.Richman, editor, *Constructive Mathematics,Proceedings of the New Mexico State University Conference Held at Las Cruces, New Mexico, August 11–15,1980*, volume 873 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 111–134. Springer, 1980. Excerpts in Computability—Computable functions, logic, and the foundation of mathematics, by R.L.Epstein et al, pp. 261–268.

[28] Richard Kaye. *Models of Peano Arithmetic*. Clarendon Press, 1991. ISBN 0-19-853213-X.

[29] Laurie Kirby and Jeff Paris. Accessible independence results for peano arithmetic. *Bull. London Math. Soc.*, 14:285–293, 1982.

[30] Jan Krajíček. *Bounded Arithmetic, Propositional Logic, and Complexity Theory*, volume 60 of *Encyclopedia of Mathematics and its applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. ISBN 0-521-45205-8.

[31] René Lavendhomme. *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*. Kluwer Texts in the Mathematical Sciences. Kluwer, Dordrecht, 1996. ISBN 0-7923-3941-X.

[32] Shaughan Lavine. *Understanding the infinite*. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1994. ISBN 0674921178.

[33] F. William Lawvere and Stephen H. Schanuel. *Conceptual Mathematics, A first introduction to categories*. Buffalo Workshop Press, Buffalo, NY, 1991. ISBN 0-9631805-1-7.

[34] F.W. Lawvere. An elementary theory of the category of sets. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 52:1506–1511, 1964.

[35] W. Lawvere. Diagonal arguments and cartesian closed categories. In *Category theory, homology theory and their applications : proceedings of the conference held at the Seattle Research Center of the Battelle Memorial Institute, June 24-July 19, 1968*, volume 92 of *Springer Lecture Notes in Mathematics*, pages 134–145. Springer, 1969.

[36] S. Maclane. The health of mahtematics. *Inteligentia*, pages 3–8, 1983.

[37] S. Maclane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 2nd edition, 1998. ISBN 0-387-98403-8.

[38] S. MacLane and leke Moerdijk. *Sheaves in Geomgery and Logic, A First Introduction to Topos Theory*. Springer, Berlin, 1992. ISBN 0-387-97710-4.

[39] D. Marker. *Model Theory:An Introduction*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Berlin, 2002. ISBN 0-387-98760-6.

[40] J. P. Mayberry. *The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets*. Number 82 in Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. ISBN 0-521-77034-3.

[41] Ieke Moerdijk and Gonzalo E. Reyes. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. Springer, Berlin, 1991. ISBN 3-540-97489-X.

[42] Chris Mortensen. *Inconsistent Mathematics*, volume 312 of *Mathematics and Its Applications*. Kluwer, 1995. ISBN 0-7923-3186-9.

[43] D. Mumford. The dawning of the age of stochasticity. In V. Arnold et al, editor, *Mathematics:Frontiers and Perspectives*, pages 197–218. American Mathematical Society, 1999. ISBN 0-8218-2070-2.

[44] Jan Mycielski. Analysis without actual infinity. *J. Symbolic Logic*, 46:625–633, 1981.

[45] Justin Needle. Vagueness and the sorites paradox - an evolving resource. `http://www.btinternet.com/~justin.needle/`.

[46] E. Nelson. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83:1165–1198, 1977.

[47] E. Nelson. *Predicative arithmetic*. Princeton University Press, 1987. ISBN 0-691-08455-6.

[48] E. Nelson. *Radically Elementary Probability Theory*. Number 117 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1987. ISBN 0-691-08455-6.

[49] Edward Nelson. Bookreview:gnomes in the fog: The reception of brouwer's intuitionism in the 1920s, by dennis e. hesseling, science networks –historical studies, vol.28 birkhauer,base,2003,xxviii + 447 pp.,isbn 3-7643-6536-6. *Bulletin of the AMS*, 2004.

[50] R. Parikh. Existence and feasibility in arithmetic. *Journal of Symbolic Logic*, 36:494–508, 1971.

[51] R. Parikh. Some results on the lengths of proofs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 177:29–36, 1973.

[52] Pavel Pudlák. The lengths of proofs. In Samuel R. Buss, editor, *Handbook of Proof THeory*, volume 137 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, chapter VIII, pages 547–637. Elsevier, Amsterdam, 1998. ISBN 0-444-89840-9.

[53] A. Robinson. *Non-Standard Analysis*. North-Holland Publishing Company, 1966.

[54] Vladimir Yu. Sazonov. On feasible numbers. In Leviant D, editor, *Logic and computational complexity*, volume 960 of *Lecture Notes in computer sicence*, pages 30–51. Springer, 1995.

[55] S. Shapiro. primer on vagueness. `http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2005-may/008956.html`, May 2005.

[56] Craig Smoryński. Some rapidly growing functions. *Math. Intelligencer*, 2(3):149–154, 1979.

[57] Mark van Atten. Luitzen egbertus jan brouwer. `http://plato.stanford.edu/archives/sum2003/entries/brouwer/`, Summer 2003.

[58] D. van Dalen. The war of the frogs and the mice, or the crisis of the mathematische annalen. *Mathematical Intelligencer*, 1990.

[59] D. van Danzig. Is $10^{10^{10}}$ a finite number? In Walter A. Carnielli Richard L. Epstein, editor, *Computability—Computable functions, Logic, and the Foundation of Mathematics*, The Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, pages 258–261. Pacific Grove, California, 1989. ISBN 0-534-10356-1.

[60] John von Neumann. Eine axiomatisierung der mengenlehre. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, 154(219-240), 1925. Reprinted as pp. 34–56 in collected works.

[61] Petr Vopěnka. *Mathematics in the Alternative Set Theory*. Teubner, 1979.

[62] Petr Vopěnka and Petr Hájek. *The theory of semisets*, volume 70 of *Studies in Logic and the Foundation of Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, 1972. ISBN 0-7204-2267-1.

[63] L Wittgenstein. ウィトゲンシュタイン全集. 大修館書店, 1976-1988. ISBN 4-469-11010-8.

[64] J.E. リトルウッド. 大きな数. In B. ボロバシュ編 and 金光滋訳, editors, リトルウッドの数学スクランブル. 近代科学社, 1990. ISBN4-7649-1016-0.

[65] 角田秀一郎. 数学の未解決問題　21 世紀に向けて 8 – 数学と複雑系. 数理科学, 441, 2000.

[66] 郡司ペギオ-幸夫. 原生計算と存在論的観測一生命と時間、そして原生. 東京大学出版会, 2004. ISBN 4130100971.

[67] 田中 俊一. 位相と論理. 日本評論社, 2000. ISBN 4-535-60127-5.

[68] 竹内外史. 証明論と計算量. 裳華房, 東京, 1995. ISBN 4-7853-1096-0.

[69] 辻下徹. 複雑系の数理–高次元圏論への招待. *Computer Today*, 1998.

[70] 辻下 徹. 生命と複雑系, pages 75–225. 複雑系の科学と現代思想. 青土社, 1998. ISBN 4-7917-9145-2.

[71] 辻下 徹. 数学と不定性–複雑系の数理・内部観測・生命. 現代思想：システムー生命論の未来, 29-3:56–64, 2001. http://ac-net.org/tjst/archives/00futeisei.pdf.

[72] 田中一之. 逆数学と二階算術. 河合文化教育研究所, 1997. ISBN 4-87999-970-9.

[73] 田中一之. 数学基礎論講義. 日本評論社, 1997. ISBN 4-535-78241-5.

[74] 田中一之. 数の体系と超準モデル. 裳華房, 2002. ISBN 4-7853-1530-X.

[75] 田中一之編, editor. 数学の基礎をめぐる論争*–21* 世紀の数学と数学基礎論のあるべき姿を考える. シュプリンガーフェアラーク東京, 1999. ISBN 4-431-70797-2.