

第4回内部観測研究会 2010.3.7

複数の有限概念を基礎にもつ数学(2)*

2010.3.10 版

立命館大学理工学部

辻下 徹

概要

現代数学は無限集合を確定した対象として取り入れて大きな進化を遂げたが、その代償として内部観測に不可避な不定性を排除し平板化した。無限集合による具体性・現実性・時間性の排除の仕方は単なる無視といってもよい乱暴な方法であるため他分野とのつながりがとりにくくなっている。

砂山の逆理は、有限同士の間にも質的な違いがあることに注意を喚起する。この逆理は、動きが察知されない時計がいつしか動いているという連続体の逆理とみなすこともできるので、砂山の逆理を公理とすることで、有限対無限、離散対連続などの二律背反から数学は解放される。

自然数は無定義用語とするが、次の数への移行、足し算、かけ算などが定義されていて、ペアノの公理系で数学的帰納法を除くものは満たされているとする。

具体的定義は無定義用語とする。「以下同様に」を使わない定義である。書き下した数式による定義や、具体的な性質を満たす最小の数である、という定義は具体的定義の例である。

「具体的に書ける」ことは「具体的に書ける可能性がある」といっても良いが、その場合の「可能性」は現実的可能性のことと考え、論理的整合性としての「理念的可能性」とは区別して考える。

用いる演算も、再帰的に定義された演算でも再帰を実際に消去できないときは具体的とは言えない。 x^y はすべての y について具体的には定義されているとはいいいがたいが、 $googplex = 10^{10^{100}}$ などを議論全体のイメージを伝えるための象徴として使う。

*<http://www.ac-net.org/tjst/doc/10/IT4.html>

具体的数より小さい数を**到達可能数**という。到達可能数は具体的数とは限らない。

$$googlplex = 10^{10^{100}}$$

は具体的な数だが、それより小さい数の大半は具体的には定義できないので構成もできない。「到達可能数」も理念的な概念であることがわかる。到達可能ではない数を**到達不能数**という。

到達不能数は具体的数ではないので、構成できないだけでなく具体的に定義することもできない。現代数学では「具体的」という概念は意味がないので到達不能数という概念は存在しないし、直観主義数学でも構成できないものは存在しないので、到達不能数という概念は存在する余地がない。

定義より到達不能数は具体的には特定できない。具体的にはとらえられず、構成するすべもないようなものは理念的にしか存在しないが、無限について、無限集合より豊かな描像を与える。

砂山の逆理は、数学的帰納法によればすべての数は到達可能（砂山の砂数にはならない）はずなのに、（砂山の砂数という）到達不能数が存在することを指摘するものだが、公理とすることも可能である。

そこで、砂山公理「到達不能数が存在する」を採用しよう。存在する到達不能数は具体的には特定できない。このことから、ある具体的条件を満たす到達可能数の増大列があれば、その条件を満たす到達不能数が存在することがわかる。これが**溢出定理**である。これが超準数学で必要となる唯一に近い基盤である。

砂山公理により、巨大な有限離散構造を遠くから見て得られる連続体を数学で扱うことが可能になる。

たとえば、到達不能数を一つ Ω ととり、 $X = \{1, 2, \dots, \Omega\}$ を遠くから見るときに、2つの数 n, m が識別可能なのは、ある到達可能な数 k により X を分割したときに、別の区分に入るとき、すなわち、 $|n - m| > \frac{\Omega}{k}$ となる場合である。識別不能性 $n \approx m$ は同値関係となるので、それで分類すると $[0, 1]$ 区間となるが、隣同士は同じだが両端は異なるような有限点列があり連続体の逆理を孕んでいる。こうして、離散性と連続性とは、同じものをどう見るかによる違いということになる。

同様に離散グラフを完備距離空間とみることができる。グラフは、頂点の集まり V と、頂点と頂点を結ぶ辺の集まり E からなる。辺をつたって頂点をつぎつぎたどる経路を道といい、2頂点 v, w の間の道の長さの最小値を v, w の間の距離という。連結なグラフは整数値の距離空間となる。ここで到達不能数 Ω を選び同値関係を入れる：

$$v \approx w \stackrel{\text{def}}{\iff} d(v, w) \approx 0.$$

このとき、 $(V/\approx, \bar{d} := \frac{d}{\Omega})$ は完備距離空間になる。距離の値は「実数」 $\{0, \dots, \Omega^2\}/\approx$ になる。例として、長さが Ω の 01 列のグラフや巨大数式のグラフなどを考える。

1 基礎

現代数学では、最初の「無限数」 ω が、最小の無限順序数として確定します。しかし無限順序数は数とはいろいろ違います。順序数としての演算はありますが和は非可換であり量としての機能をもっていません。また ω より小さい順序数（つまり自然数）の部分は何も特筆すべきことがなく、 ω までの描像が平板です。砂山の逆理はこういう描像に対する疑義になっています。

砂山の逆理

1は到達可能数である。到達可能数の次の数も到達可能数である。しかし、到達不能な数がある。

以下、これを公理とする数学を考えることにします。

1.1 具体的に記述できる数とそうでない数

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は無限集合です。数を列挙する作業は決して終わらないのですが、その全体は確定できることが現代数学の重要な基盤となっています。

集合 $\mathbb{N}$ の中で、具体的に記述できる自然数は「わずか」です。変数を使うと無名な数も含めて議論できますが、無名であるということで無名な数が積極的役割を果たすことはありません。その理由としては、「無名である」あるいは「具体的ではない」という形容詞が曖昧なため数学的では使えない、ということが考えられます。

実際、 $google = 10^{100}$ は十進法で書けますが、 $googlplex = 10^{google}$ は、べき記号をつかえば具体的に書けていますが、十進法だけでは具体的には書き下せません。具体性は数の表現法にも依存しますが、たとえ数の表現法を十進法だけに決めたとしても、 $10^{10^{10}}$ が具体的かどうかは、人によって、あるいは同じ人でも状況によって判断は違うかも知れません。つまり、具体的という概念は主観的で確定していないということです。主観的な概念は数学では使えないように思われます。しかし、曖昧な主観的概念を使った数学的議論は可能です。「意識」ほど主観的概念はないですが、「意識」についても議論が可能であることを考えると、「具体的」という言葉を数学用語として使うことは唐突なことでは無いと思います。

40年前にRobinsonは「到達可能性」に相当する「標準的」という用語を現代数学の中で導入しました。超準数学(nonstandard mathematics)は現在にいたるまで多くの数学者が広範囲の数学分野でその有効性を検証してきています。しかし、現代数学においてアドホックな位置づけにとどまっていますし、現代数学の中で展開されているがためのアーティファクトが多く、大学での数学教育への導入はかなり無理があるままです。

そこで「具体的」という主観的な言葉に基づいて数学を素朴に再構築ができるかどうかを試みています。この作業はかなり時間を要しますが、多くの人が行っている超準数学による現代数学の再構築は大きなヒントになり「超準数学の初等化」という側面もありますが、無限集合を不要とするという点で「現代数学の脱構築」につながると感じます。

1.2 到達不能数の存在公理

以下、曖昧さを孕む言葉として「到達不能数」を考えます。これは具体的に記述できるような数のよりも大きい数です。具体的な数が到達不能数となることはないので、到達不能数の例というものはありませんが、到達不能数があることは誰でも納得できることではないかと思います。

砂山の公理

到達不能数が存在する。

到達不能数の一つを Ω と書きましょう。どういう巨大な具体的な数を考案しても、それよりも大きいというような数ということになります。その存在は「後出しジャンケン」で保証されます、つまり、新しい具体的な巨大な数 T が考案されるたびに最初からそれを組み込んで $T < \Omega$ だとして理論をやり直せばよいのです。現代数学では、「後出しジャンケン」の議論は、可算無限を使ってカモフラージュされていますが日常的に使われています。

もっと一般に、数 x から数 y に到達出来ないということを、 x を使って具体的に記述できる数はすべて y より小さいこととして定義します。そして $x \ll y$ と書くことにします。上の公理が自然であるのと同様に次の公理も自然なものと言えます：

砂山の公理 II

どの数 x についても $x \ll y$ となる数 y が存在する。

1.3 転移定理

到達不能数が具体的には定義できないことから次がわかります。条件 P は数論的な条件（偶数、奇数、平方数、素数、等々）だとします。

転移定理 1

ある到達不能数が P を満たすとき、 P を満たす具体的な数が存在する。

証明

P を満たす最小の数 $\min P$ は「 P を満たす最小の数」という具体的記述をもつので到達不能ではない。

ここで最小値原理——数の集まりがあれば、その中で最小のものがある——を使っています。数の集まりが具体的な条件で与えられていれば、それを満たすものの中で最小のものは具体的に定義できている、と言って良いのでしょうか。たとえば、グッドシュタイン列 $g(n)$ がゼロとなるときの添え字は $\min \{ g = 0 \}$ と書けますが、この数は巨大すぎて、それが存在することはペアノの公理系では証明できないことがオーソドックスな数学で証明されています。しかし、これよりも大きい数があることは無限集合を認めるとすれば当然のことですので、このような巨大な数も具体的に書ける数だと考えるとしても、それより大きな数があるというのはやはり納得できます。

なお、「最小値原理」は数学的帰納法と同等であり、数学的帰納法は数概念の一意性と同等なことは知られています。そういうものを使って良いのでしょうか。しかし、ここで使う「最小値原理」は「有限集合」に関するもので、数学的帰納法とは異なるものです。有限集合についての最小値原理は次のように考えると認めることができます。1 から順に Ω まで数が Ω 個並んでいるということは現実には意味がないですが理念としては明確な描像を持ちます（これは、理念の世界でも明確な描像を持たない無限集合とは対照的です）。条件 P を満たす数があることがわかっているならば、この描像の中で 1 から順に数を調べれば P を満たす最初の数が定まるというのが最小値原理です。

系として

転移定理 2

すべての具体的な数が P を満たすとき、到達不能数も P を満たす。

これらは、超準解析の定式化の一つである内的集合論では「転移公理」と呼ばれていますが、砂山公理をから簡単に証明ができます。転移定理 1 より「 P を満たさない到達不能数があれば P を満たさない具体的な数があるので矛盾（証明終）」

1.4 溢出性

他の到達不能数との関係を表す条件 P （たとえば $x < \Omega$ ）を考えたときには転移定理は成り立っていませんが、似たようなことは成り立ちます。それが溢出定理です：

溢出定理 1

P が到達可能数について成り立つとき P を満たす到達不能数がある。

証明

P を満たさない到達不能数があると仮定します。 P を満たさない数で最小なもの N は仮定により到達不能数です。このとき、 $N - 1$ は到達不能数で P を満たします (証明終)。

この証明では、到達不能数との関係を表す条件について最小値原理が使われていますが、これは正当でしょうか。理念世界で考えると、 P を満たさない到達不能数 Ω を考えると、1 から Ω までのなかで P を満たさないものを順に調べれば良いので問題なさそうです。

対偶もよく使います：

溢出定理 1

ある数以下の到達不能数は P を満たすとき、 P を満たす到達可能数がある。

1.5 到達不能数の識別不能性

到達不能数を具体的には指定できませんが、一つの到達不能数を記号 Ω を使って表わしてみましょう。到達不能数が具体的には定義できないとすると、記号 Ω が二カ所に出現するとき、それが同じ数だと考えることに意味があるかどうか不安になります。

ここで「識別不能性」という概念が登場します。どの到達不能数も具体的には定義できないとすると、2つの到達不能数を区別する具体的な方法がないことになります。もちろん Ω と $\Omega + 1$ 、あるいは Ω^2 と Ω^Ω は明らかに違いますが、これは、2つの到達不能数の間に具体的な関係がある場合です。

2到達不能数が**独立**であるとは、それらの間には具体的な関係が全くないこととして定義します。ここでも「具体的」という主観的な言葉が使われているので主観的な言葉になりますが、それぞれの主観的な解釈において意味は明白になります。独立な2到達不能数は、定義より具体的には区別できないので、識別不能です。つまり、 Ω_1 について具体的に成り立つことと Ω_2 について具体的に成り立つことは同じです。

到達不能数は具体的な性質の集まりを使っても一つには絞り込めないのですが、それが満たす具体的な性質の集まり (1タイプ) さえ一致していれば2つの到達不能数は「同型」であり、それが「同じ」かどうかは不要な詮索となります。

たとえば到達可能数 n ではいつも割り切れる到達不能数 Ω を考えているとき、他の場所に出てくる記号 Ω は、「到達可能な n についてはいつも割り切れる到達不能数」を意味していればよく、最初の Ω と今の Ω が「同じ」かどうかはどうでも良い疑問になります。最初の Ω と今の Ω が「同型」であれば良いのです。

1.6 多様な到達不能数

到達不能数の一つを特定はできませんが、転移公理により種々の性質を満たす到達不能数が存在します。

たとえば、素数である到達不能数が存在します。「素数である」という性質は「具体的」や「到達可能数」などの言葉を使っておらず、素数が無限に存在するという通常の証明は、変数値が到達不能数であろうとなかろうと妥当するので、到達不能数についても、それより大きな到達不能数があることがわかります。

また、どの到達可能数でも割り切れる到達不能数が存在します。これは「到達可能性」という言葉が入っているので主観的主張のようですが、「数 x 以下の数ではいつも割り切れる数が存在する」という条件を $A(x)$ と書くと、これは x についての客観的条件であり、すべての到達可能数 h について $A(h)$ は成り立ちます。したがって転移定理により、どの到達不能数 N も $A(N)$ を満たすことがわかります。つまり、どの到達不能数 N についても、 N 以下の数で割りきれ数 $x(N)$ が存在することがわかります。到達不能数 N を一つとって考えると、到達可能数はそれより小さいので $x(N)$ を割り切ります。

なお、この例は転移公理などは不要で、 $N!$ を考えれば十分です。

1.7 応用：定義域の拡大

添字が到達可能数について定義されている数列は、定義域が拡大できます。まず、数列 $(x_i)_i$ が到達不能数を用いずに定義されている場合を考えます。

命題

到達可能数について定義された V の点列 x_i は、定義において到達不能数が使われていない場合、すべての数を添え字とする数列に一意的に拡張できる。

証明

数列 x_i が到達可能数について定義されているとは、到達不能数を含まない客観的条件 $P(x, y)$ があり、到達可能数 i について $\exists^1 y P(i, y)$ が真であり $P(i, x_i)$ が成り立っているということです。ここで $\exists^1 y \dots$ は、 $\dots$ を満たす唯一の y が存在するということを表します。

客観的性質 $\exists^1 y P(x, y)$ は到達可能数 x について真なので、転移定理により、すべての x についても真です。従って、任意の数 i について $P(i, y)$ を満たす唯一の y が存在するので、それを x_i と置けばいいわけです。

数列の定義で到達不能数が使われている場合も、部分的に拡張が可能である。

命題

到達可能数について定義された数列 x_i は、定義において到達不能数が使われていても、ある到達不能数以下の数について定義された数列に拡張できる。さらに、二通りの拡張 x'_i, x''_i があるとき、ある到達不能数以下の添え字では拡張は一致する。

証明

数列 x_i が到達可能数について定義されているとは、ある客観的な二項関係 $P(x, y)$ があり、客観的な性質 $Q(z) \forall x < z \exists^1 y P(x, y)$ が到達可能数 z について真であるということです。従って溢出定理により、ある到達不能数 N についても $Q(N)$ は真です。また2通りの拡張があるとき、添え字は小さい方の到達不能数に揃えておきます： $(x'_i)_{i \leq N}, (x''_i)_{i \leq N}$ 。このとき $\forall i \leq k (x'_i = x''_i)$ が任意の到達可能数 k について成り立つので、ある到達不能数 $N' \leq N$ についても真となります。

1.8 稠密性公理

$X_1, \dots, X_k$ が具体的個数の数の列とすると、これらを使って具体的に定義できるとの数よりも大きい数 N は、これらから到達不能であるといい、

$$X_1, \dots, X_k \ll N$$

と書くことにします。

Ω が到達不能数で、 f が具体的な関数ならば、 $f(n) < \Omega$ が到達可能数について成り立つので、溢出定理から $f(\Omega_1) < \Omega$ となる到達不能数 Ω_1 があることがわかるので次の公理は、意外ですが、納得できるものです。

稠密性公理

到達不能数 $\Omega_1 \ll \Omega_2$ に対し、 $\Omega_1 \ll \Omega \ll \Omega_2$ を満たす Ω がある。

以上が到達不能数をもつ数学の基礎です。

2 実数

2.1 識別不可能性

到達不能数 Ω を決め、有限集合 $[0.. \Omega^2]$ を考えます。この一部 $[0.. \Omega]$ の全体を視野に入れると、連続な区間としか見えません。この見えを取り入れて、以下の関係を定義します：

定義

$$X \approx Y \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{すべての到達可能数 } h \text{ について } h|X - Y| < \Omega.$$

$X \approx Y$ のとき X, Y は識別不能だといいます。たとえば、到達可能数は 0 と識別不能です。さらに $\sqrt{\Omega}$ も 0 と識別不能です。

識別不能性は同値関係の公理を満たし、さらに、個数が到達可能数であるような数列の隣りどうしが識別不能であれば両端も識別不能です。

しかし数列 $X_i = i$ ($0 \leq i \leq \Omega$) を考えると、隣りどうしは識別不能ですが、両端の 0 と Ω は識別可能です。砂山の逆理が成り立つことになります。

2.2 実数の定義

この同値関係による同値類を実数と呼びます。 $|X| < k\Omega$ となる具体的 k が存在するような数 X の同値類は到達可能な実数であるといいます。

N が属する同値類を $[N]$ と書くことにします。四則演算は次で定義できます。証明は実数の四則演算の連続性を証明するときの議論と実質的に同じです。

- $[X] + [Y] := [X + Y]$,
- $[X], [Y]$ が到達可能なとき、 $[X][Y] := [XY/\Omega]$. (I/K は整数商)
- $[Y] \neq [0]$, $[X], [Y]$ が到達可能なとき $[X]/[Y] := [X\Omega/Y]$.

正の数 Y と、 $|X| < kY$ を満たす具体的な k と整数 X があるとき、実数 $[X\Omega/Y]$ が定まります。これを $\frac{X}{Y}$ と書きます。定義から $\frac{X}{\Omega}$ が $[X]$ に他なりません。

2.3 指数関数、自然対数

たとえば、自然対数の底 e は

$$e = \frac{(1 + \Omega)^\Omega}{\Omega^\Omega}$$

で定義します。 $(1 + \Omega)^\Omega < 3\Omega^\Omega$ が初等的に示せるので、これで e が定義されます。

一般に

$$e^{[X]} := \frac{(X + \Omega^2)^\Omega}{\Omega^{2\Omega}}$$

と定義すると、 $e^{x+y} = e^x e^y$ が簡単に示せます。

対数関数を

$$\log[X] := \left[\min \left\{ Y \mid (X + \Omega^2)^\Omega < Y\Omega^{2\Omega-1} \right\} \right]$$

と定義すると指数関数の逆関数であることがわかり、一般のべきは

$$[X]^{[Y]} = e^{[Y]\log[X]}$$

で定義できます。

3 離散グラフが決める完備な距離空間

整数から実数を構成した方法は、一般のグラフにも適用できます。これにより離散構造と連続体とがつながります。

3.1 グラフが定める距離空間

連結グラフ G は頂点のあつまり V と、頂点を結ぶ辺の集まり E で定義されます。頂点 x から頂点 y まで辺をたどっていただけますが、そのときにたどる辺の本数の最小値を $d(x, y)$ と書きます。これは、整数値の距離関数になります。そこで実数の構成の場合と同様に識別不能性を定義します。到達不能数 Ω を一つ選び

$$x \approx y \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{具体的な } k \text{ について } kd(x, y) < \Omega.$$

と定義します。これにより距離空間 $\bar{V} = V / \approx$ が得られます。これは砂山の逆理をはらむ

ものです。二点の距離は $\tilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{\Omega}$ で定義します。

3.2 復習：点列の収束

到達可能な添え字を持つ点列 $v_1, v_2, \dots, \in \tilde{V}$ を通して $\tilde{V}$ の「位相的性質」を表現してみましょう。数列の場合と同様に、こういう点列は添え字を到達不能数まで拡張できます。

命題

到達可能数について定義された V の点列 x_i は、ある到達不能数以下の数について定義された数列に拡張できる。さらに、二通りの拡張 x'_i, x''_i があるとき、ある到達不能数以下の添え字では拡張は一致する。

証明は数列の場合と同じです。

証明

数列 x_i が到達可能数について定義されているとは、ある客観的な二項関係 $P(x, y)$ があり、客観的な性質 $\forall x < z \exists^1 y P(x, y)$ が到達可能数 z について真である。従って、溢出定理により、ある到達不能数 $z = N$ についても真です。

また2通りの拡張があるとき、添え字は小さい方の到達不能数に揃えておきます：
 $(x'_i)_{i \leq N}, (x''_i)_{i \leq N}$. このとき $\forall i \leq k x'_i = x''_i$ が任意の到達可能数 k について成り立つので、ある到達不能数 $N' \leq N$ についても真となります。

点列 $(x_i)_{i \leq A}$ がコーシー列であるとは、 i, j が到達不能数のとき $x_i \approx x_j$ となることです。点列 $(x_i)_{i \leq A}$ が α に収束するとは、 i が到達不能数ならば $x_i \approx \alpha$ となることです。定義から、コーシー列であることと収束することとは同値です。

一方、以下の翻訳をするとコーシー列であることと収束することとはかなり違います。以下は溢出定理を使って証明できます。

命題

$(x_i)_{i \leq A}$ が α に収束するための必要かつ十分な条件は、任意の到達可能数 h に対し、ある到達可能数 k があり、 $i > k$ ならば $\tilde{d}(x_i, \alpha) < \frac{1}{h}$ となることである。

超準数学ではおなじみの定理ですが以下のように証明できます。

証明

まず、 $(x_i)_{i \leq A}$ が α に収束するとします。到達可能数 h に対し、

$$\forall i \geq N \text{ ならば } d(x_i, \alpha) < \frac{1}{h}$$

という条件を考えます。これは、到達不能数 N についてはいつも成り立ちますから溢出定理により、ある到達可能数 k についても成り立ちます。すなわち、 $i \geq k$ ならば $d(x_i, \alpha) < \frac{1}{h}$ が成り立つことがわかります。

次に逆を示しましょう。任意の到達可能数 h に対し、ある到達可能数 k があり、 $i > k$ ならば $\tilde{d}(x_i, \alpha) < \frac{1}{h}$ であると仮定します。 $B \leq A$ を到達不能数とし、 h を到達可能数とします。 $i > k$ ならば $\tilde{d}(x_i, \alpha) < \frac{1}{h}$ となる到達可能数 k をとると、 $B > k$ なので

$$\tilde{d}(x_B, \alpha) < \frac{1}{h}$$

が成り立ちます。 h は任意なので

$$x_B \approx \alpha$$

がわかりました。

命題

$(x_i)_{i \leq A}$ がコーシー列であるための必要かつ十分な条件は、任意の到達可能数 h に対し、ある到達可能数 k があり、 $i, j > k$ ならば $\tilde{d}(x_i, x_j) < \frac{1}{h}$ となることである。

証明

$(x_i)_{i \leq A}$ がコーシー列であるとする。 $I, J \leq A$ は到達不能数であるとする。 h が到達可能ならば $i, j > x$ ならば $d(x_i, x_j) < \frac{1}{h}$ は任意の到達不能数 $x \leq A$ について成り立つ。従って、溢出定理から、ある到達可能数 $x = k$ についても成り立つ。すなわち、 $i, j > k$ ならば $d(x_i, x_j) < \frac{1}{h}$ がなりたつ。
 逆に、任意の到達可能数 h に対し、ある到達可能数 k があり、 $i, j > k$ ならば $\tilde{d}(x_i, x_j) < \frac{1}{h}$ となるとする。 $I, J \leq A$ が到達不能数であるとする。任意の到達可能数について、 $\tilde{d}(x_I, x_J) < \frac{1}{h}$ 。 h は任意の到達可能数なので $x_I \approx x_J$ 。よって x_i はコーシー列である。

3.3 完備性

コーシー列であることと収束することは同値な条件なので、完備性は自明に成り立ちます。完備性は、到達可能数を添え字とする数列が到達不能数を添え字とする数列に拡張できることに他ならないのですが、これは、溢出定理に他なりません。到達不能数の存在公理が、完備化を最初から行っていることになるという感じです。

命題

距離空間 $(\tilde{V}, \tilde{d})$ は完備である。

3.4 測地性

距離空間 $(\tilde{V}, \tilde{d})$ は測地的です。どういうことかという、どの二点 x, y についても、長さが $\tilde{d}(x, y)$ である道が存在するのです。ここで x から y への道とは、 $[0, 1]$ から $\tilde{V}$ への連続な写像 f で $f(0) = x, f(1) = y$ を満たすものです。道の距離は $[0, 1]$ の分割 $0 < t_1 < \dots < t_k < 1$ についての和 $\sum_i d(f(t_i), f(t_{i+1}))$ の下限を表します。これは、 x, y を結ぶ長さ $N = d(x, y)$ の辺を $x_0 = x, x_1, \dots, x_N = y$ として $f([i]) := [x_i]$ と定義すれば測地線が得られます。

3.5 コンパクト性

距離空間のコンパクト性は次のように表現できます。

コンパクト性の定義

すなわち V の巨大部分集合 W (個数が巨数ということ) に対し、ある巨大部分集合 $U \subset W$ があり $x, y \in U$ ならば $d(x, y) \approx 0$ となります。

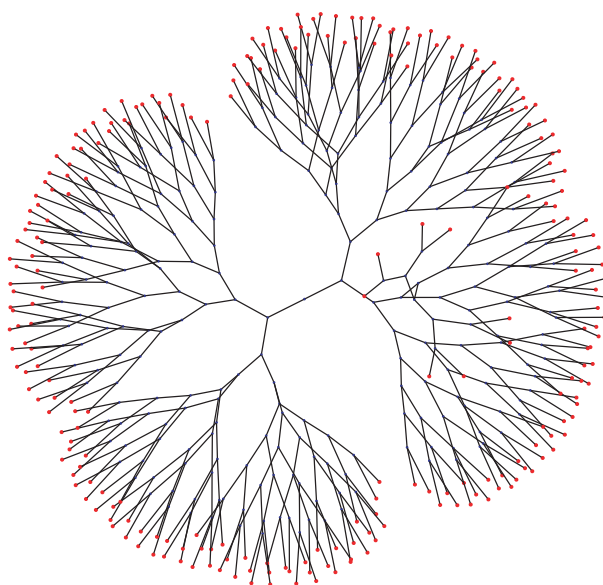
例としては $[0, 1]$ はコンパクトになります。実際、 $|X| = B$ が到達不能数とすると、 $[0, 1]$ を $\sqrt{B}$ 個の等区間に分割すると、鳩ノ巣原理より、その中のどれか I は $|I \cap X| \geq \sqrt{B}$ となり、 $Y = I \cap X$ とおけばよいことがわかります。

4 例：長さ Ω の 01 語のなす距離空間

以下 $V = \{0, 1\}^\Omega$ を頂点集合とするグラフをいくつか考えます。 V の要素は高さ Ω の 2 進木の深さ Ω の葉の全体、超立方体の頂点集合、あるいは、 $\{1, \dots, \Omega\}$ のべき集合とみることができます。2 進木とみるときは $\{1, \dots, \Omega\}$ の順序構造が関与します。 Ω 次元の超立方体とみるときや、べき集合とみるときは順序構造は関係しません。

4.1 カントール集合

長さ Ω 以下の 01 語の全体 $\tilde{V} = \bigcup_{i \leq \Omega} \{0, 1\}^i$ は $\{0, 1\}^\Omega$ を含むみます。 $\tilde{V}$ を頂点とし、辺は w と $w0, w$ と $w1$ を結ぶものからなるとします。全体は空語を頂点とする木の形となります。 $\tilde{d}(x, y) := \frac{1}{\Omega} d(x, y)$ と定義して距離空間を定めると、 0^Ω と 1^Ω の距離が最長で 2 となります。



この距離を V に制限すると超距離 (ultrametric) になります：

$$\tilde{d}(x, z) \leq \min \left\{ \tilde{d}(x, y), \tilde{d}(y, z) \right\}.$$

これより、どの正数 ε についても $\tilde{d}(x, y) \leq \varepsilon$ は「 $\varepsilon\Omega$ 次前の先祖を共有する」という同値関係となります。

命題 (「チコノフ」

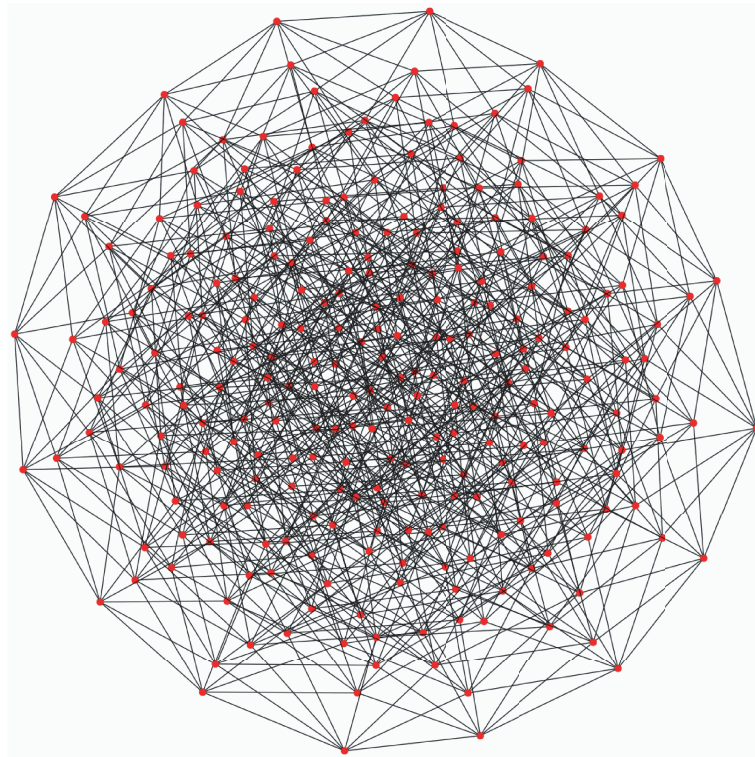
距離空間 $(\tilde{V}, \tilde{d})$ はコンパクトである。

4.2 巨立方体

長さ Ω の 2 つの語が一カ所だけ違うとき辺で結んで得られるグラフを考えます。このときの距離は Hamming 距離となります。これは集合 $\{1, 2, \dots, \Omega\}$ の部分集合に距離

$$d(A, B) := |A \Delta B|$$

を入れたものとなっています。



この直径は Ω ですので、距離 $\tilde{d} = d/\Omega$ により得られる連続体は、 $\{1, 2, \dots, \Omega\}$ のべき集合に測度 $p(A) = |A|/\Omega$ を入れてゼロ測度である集合の差を無視して得られるものとなります。ゼロ測度のものを加算個加えてもゼロ測度というのが通常の測度論ですが、ここで

は、ゼロ測度のものを到達可能数の個数だけ合わせてもやはりゼロ測度ですが、ある到達不能数個加えると測度 1 の集合になります。「ルベーク可測な部分集合」は、到達可能な個数の単純巨大集合による内からの近似と外からの近似で、測度が近似できるものとして定義すれば、すべての部分集合がルベーク可測というわけではないですが、ルベーク可測でないものにも自然な測度が定義できるので理論がかなりシンプルになります。これは超準解析の Loeb 測度に対応します。

命題

距離空間 $(\tilde{V}, \tilde{d})$ はコンパクトではない。

4.3 部分集合の距離空間

前節の距離は、部分集合の元全体を微少移動しても距離は微少ではないことがあるので、部分集合を遠くから見たときの距離にはなりません。そこで $A, B \subset \{1, \dots, \Omega\}$ について、次の距離を入れます：

$$d(A, B) = \max \left\{ \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(a, b) \right\}.$$

このとき、 $d(A, B) \approx 0$ は、どの $a \in A$ についても $a \approx b$ となる $b \in B$ があり、逆も同様、ということになり、 A と B は遠くから見ても区別がつかないというものになります。この距離空間をべき距離空間と呼ぶことにします。

これは、どの距離空間についても、その部分集合の距離として一般に定義できます。

これも次のグラフ構造から決まる距離になります：部分集合を頂点とし、部分集合 A, B が辺を形成するのは、 A のどの要素も B のある要素と辺でつながって、 B のどの要素も A のある要素と辺でつながっているときとします。

命題

べき距離空間はコンパクトである。

稠密性公理を使うと示せます。

証明. V を部分集合の巨大集合とする。 $|V| = \Omega_1$ とする。 $1 \ll \Omega_2 \ll \Omega_1$ となる Ω_2 をとる。このとき、

$$2^{\Omega_2} \Omega_2! \ll \Omega_1$$

である。

集合 $\{1, \dots, \Omega\}$ を Ω_2 個に分割する： $Q = \Omega/\Omega_2$ とおき、 $i < \Omega_2$ について

$$X_i := \{ n \mid iQ \leq n < (i+1)Q \}$$

とおき、

$$X_{\Omega_2} := \{ n \mid Q\Omega_2 \leq n \leq \Omega \}$$

とおく。このとき、すべての i について $|X_i| \geq Q$ であり、

$$[1..\Omega] = \bigcup_i X_i$$

となる。

W を $[1..\Omega]$ の部分集合の集合とすると、

$$W_i = \{ w \mid w \cap X_i \neq \emptyset \}$$

とおく。このとき W が空集合を含まなければ

$$W = \bigcup_i W_i.$$

V について上の表示より

$$|V| \leq \sum_i |V_i|.$$

右辺の項の数は Ω_2 なので、 $|V_{i_1}| \geq \Omega_1/\Omega_2$ となる i_1 が存在する。

そこで $V^1 = V_{i_1}$ とおく。 V^1 について、次のいずれかが成り立つ：

- $i \neq i_1$ ならば

$$|V_i^1| < \frac{\Omega_1}{2\Omega_2(\Omega_2 - 1)}.$$

このとき、

$$\left| \bigcup_{i \neq i_1} V_i^1 \right| \leq \frac{\Omega_1}{2\Omega_2} < \frac{|V^1|}{2}$$

となるので、

$$V^2 := V^1 \setminus \bigcup_{i \neq i_1} V_i^1$$

とおくと $|V^2| \geq \frac{\Omega_1}{2\Omega_2} \gg 1$. しかも V^2 の要素は X_{i_1} に含まれるので、すべて 1 点集合 $\{Q i_1\}$

と識別できないので、求める巨大部分集合が構成できたことになる。

- そうではなく

$$|V_{i_2}^1| \geq \frac{\Omega_1}{2\Omega_2(\Omega_2 - 1)}$$

となる $i_2 \neq i_1$ があるとき、

$$V^2 := V_{i_2}^1$$

とおく。

以下同様の操作を続けると、次のような集合 $J \subset [1..\Omega_2]$ と、部分集合 $W \subset V$ が定まる：

- $j \notin J$ ならば $W_j = \emptyset$
- $j \in J$ ならば $|W_j| \geq \frac{\Omega_1}{2^{\Omega_2} \Omega_2!}$.

このとき、 W のどの要素も $\{jQ \mid j \in J\}$ と識別できない。■

5 例：式のなす連続体

数式全体に自然なグラフ構造が入ります。 $i > 0$ のとき Σ_i を i 変数の演算記号の集合とします。 c を定数記号とします。 Σ 式は次のように定義されます：

- c は Σ 式.
- $f \in \Sigma_k, t_1, \dots, t_k$ が Σ 式の時、 $f(t_1, \dots, t_k)$ も Σ 式.

式は木で表すことができます：各ノードには演算記号が書き、葉には c を書きます。式 t の一つの葉 γ に書かれている c のかわりに、別の式 s を書いて新しい式が得られます。この操作を、 t における葉 γ に s を代入するといい、その結果得られる式を $t[\gamma = s]$ と書きます。

2つの式 t, s は、次の場合に辺で結ぶことにします

- $s = f(c, c, \dots, t, c, c, \dots, c)$,
- $s = t[\gamma = f(c, c, \dots, c)]$,

ただし、 $f \in \Sigma_k$.

たとえば、二項演算 p, m があるとき、次は辺の例です：

$$(c, p(c, c)), (p(c, c), p(p(c, c), c)), (p(c, c), m(p(c, c), c)).$$

式 t に現われる演算記号の個数を $|t|$ と書くと t, s が辺をなすとき、 $||t| - |s|| = 1$ なので、このグラフの距離を d とすると

$$d(t, s) \geq ||t| - |s||$$

であることがわかります。

一方、式 $t = f(t_1, \dots, t_k)$ は $f(c_1, \dots, c_k)$ に $|t| - 1$ 個の辺でつなげることでき最後に c に辺につながるので $d(t, c) = |t|$ です。よって $d(t, s) \leq |t| + |s|$ であることがわかります。 $|t| \leq \Omega$ となる式の全体は直径が 2Ω の距離空間となり、 $\tilde{d} = d/\Omega$ による同値関係で割った空間は直径 2 の距離空間となります。これは「完備」な距離空間です。