2001 年度後期 形式概念解析入門　　資料 2001.12.10Ver. 1,
http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/am01.html

7 形式文脈の圏

7.1 完備束の間の上限保存写像と下限保存写像の関係

L, M を完備束とする。$f : L \to M$ と $g : M \to L$ が、どの $\ell \in L, m \in M$ についても

$$f\ell \leq m \Leftrightarrow \ell \leq gm$$

を満たすとき、(f, g) を L から M へのガロア対応と呼ぶ。

命題 1 *(i)* $(f, g) : L \to M$ をガロア対応とするとき、f は上限を保ち、g は下限を保つ。

(ii) $f : L \to M$ が上限を保つならば、(f, g) がガロア対応となるような $g : M \to L$ が存在する。

(iii) $g : M \to L$ が下限を保つならば、(f, g) がガロア対応となるような $g : M \to L$ が存在する。

証明.

(i) $\ell_i \in L$ とする。$f(\bigvee_i \ell_i) = \bigvee_i f\ell_i$ を示す。

$$\begin{aligned} f(\bigvee_{i \in I} \ell_i) \leq m &\Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} \ell_i \leq gm \\ &\Leftrightarrow \ell_i \leq gm \quad \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow f(\ell_i) \leq m \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} f(\ell_i) \leq m. \end{aligned}$$

よって、$f(\bigvee_i \ell_i) = \bigvee_i f(\ell_i)$.

(ii) $f : L \to M$ が上限を保つとする。

まず、f は順序を保つ. 実際、$a \leq b$ ならば $b = a \bigvee b$. 従って、$fb = f(a \bigvee fb) = fa \bigvee fb$. 故に $fa \leq fb$.

$g(m) := \bigvee \{ \ell \mid f\ell \leq m \}$ と定義する。このとき、$\ell \leq g(m)$ とすると、$f\ell \leq f \bigvee \{ \ell \mid f\ell \leq m \} = \bigvee \{ f\ell \mid f\ell \leq m \} \leq m$.

逆に、$f\ell \leq m$ ならば、$\ell \in \{ \ell \mid f\ell \leq m \}$. よって、$\ell \leq \bigvee \{ \ell \mid f\ell \leq m \} = f(m)$. 以上により (f, g) はガロア対応となる。

(iii) も同様に示される。 ∎

7.2 形式文脈の射

$C_i = (X_i, A_i, \models_i)$ $(i = 1,\ 2)$ を形式文脈とする。$f_! : X_1 \to X_2, f^! : A_2 \to A_1$ の組 $f = (f_!, f^!)$ が文脈射であるとは、$x_1 \in X_1, a_2 \in A_2$ に対し

$$f_! x_1 \models_1 a_2 \Leftrightarrow x_1 \models_2 f^! a_2 \tag{1}$$

が成立することを言う。

命題 2 $f = (f_!, f^!)$ について、次は同値

(i) f は文脈射.

(ii) $a_2 \in A_2$ に対し、

$$(f^! a_2)' = f_!^{-1}(a_2'). \tag{2}$$

(iii) $x_1 \in X_1$ に対し、

$$(f_! x_1)' = {f^!}^{-1}(x_1'). \tag{3}$$

証明. $f_! x_1 \models_2 a_2$ は $f_! x_1 \in a_2'$ と同値で、これは $x_1 \in f_!^{-1}(a_2')$ と同値。

一方 $x_1 \models_1 f^! a_2$ は、$x_1 \in (f^! a_2)'$ と同値。従って、(1) は (2) と同値。

また、$f_! x_1 \models_2 a_2$ は $a_2 \in (f_! x_1)'$ と同値で、$x_1 \models_1 f^! a_2$ は $a_2 \in {f^!}^{-1}(x_1')$ と同値。従って、(1) は、(3) と同値。 ∎

命題 3 (Y_i, B_i) を C_i の形式概念とする（$(i = 1,\ 2)$）. このとき

(i) $(f_! Y_1)' = {f^!}^{-1} B_1$.

(ii) $(f^! B_2)' = {f_!}^{-1} Y_2$.

証明.

$$\begin{aligned} b_2 \in (f_! Y_1)' &\Leftrightarrow f_! y_1 \models_2 b_2 \quad \forall y_1 \in Y_1 \\ &\Leftrightarrow y_1 \models_2 f^! b_2 \quad \forall y_1 \in Y_1 \\ &\Leftrightarrow f^! b_2 \in (Y_1)' = B_1 \\ &\Leftrightarrow b_2 \in {f^!}^{-1} B_1. \end{aligned}$$

$b_2 \in B_2$ は任意の元だったので、$(f_! Y_1)' = {f^!}^{-1} B_1$.

同様にして、*(ii)* も示される。 ∎

$f : C_1 \to C_2$ が文脈射のとき、

$$f_* : \mathcal{B}(C_1) \to \mathcal{B}(C_2) \quad f^* : \mathcal{B}(C_2) \to \mathcal{B}(C_1)$$

を次のように定義する：

$$\begin{aligned} f_*(Y_1, B_1) &= ((f_! Y_1)'', (f_! Y_1)') \\ f^*(Y_2, B_2) &= ((f^! B_2)', (f^! B_2)''). \end{aligned}$$

命題 (**??**) より次のようにも表示できる。

補題 4

$$\begin{aligned} f_*(Y_1, B_1) &:= ((f^{!-1} B_1)', f^{!-1} B_1), \\ f^*(Y_2, B_2) &:= (f_!^{-1} Y_2, (f_!^{-1} Y_2)'). \end{aligned}$$

証明. $f^{!-1} B_1 = (f_! Y_1)'$ より、

$$f_*(Y_1, B_1) = ((f_! Y_1)'', (f_! Y_1)') = ((f^{!-1} B_1)', f^{!-1} B_1).$$

後者についても同様。 ∎

命題 5 (f_*, f^*) はガロア射 $\mathcal{B}(C_1) \to \mathcal{B}(C_2)$ となる。

証明.

$$f_*(Y_1, B_1) \le (Y_2, B_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (Y_1, B_1) \le f^*(Y_2, B_2),$$

を示す。

$$\begin{aligned} f_*(Y_1, B_1) \le (Y_2, B_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad f^{!-1} B_1 \supseteq B_2 \\ &\Longleftrightarrow \quad B_1 \supseteq f^! B_2 \\ &\Longleftrightarrow \quad Y_1 = B_1' \subseteq (f^! B_2)' = f_!^{-1}(Y_2) \\ &\Longleftrightarrow \quad (Y_1, B_1) \le f^*(Y_2, B_2). \end{aligned}$$

∎

系 6 f_* は $\bigvee$ を保ち、f^* は $\bigwedge$ を保つ。