2001 年度後期 形式概念解析入門　　資料　2001.10.10 更新 Ver. 2.1,
http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/am01.html

目 次

序

0.1　講義の目的

形式概念解析は、非数値データに隠れた論理構造を、ガロア束を通して分析する方法である。その数学基盤である束論 (lattice theory)・閉包作用素の基礎事項を講義する。具体例の計算に重点を置く。

0.2　講義の予定

- 序：２項関係に関する双極定理（Bipolar theorem）
  例：ガロア理論の基本定理・ヒルベルトの零点定理・ゲーデルの完全性定理
- 順序と束の基礎概念
  上限・完備性・束の演算・例
- 閉包作用素
  原始論理・コヒーレンス（独立性と従属性）の分類・帰結関係性
- 形式概念解析の基礎
  極作用素の基本定理・概念束の計算法
- 形式概念解析の道具
  部分・商・分解

- トピックス
  - 並列計算のモデル
  - 情報射の概念とその応用
  - 他

0.3 参考文献

1. B.A.Davey and H.A.Priestly, Introduction to Lattices and Order Cambridge University Press 1990, ISBN 0-521-36766-2
2. B. Ganter and R. Wille, Formal Concept Analysis, Mathematical Foundations pringer 1999, ISBN 3-540-62771-5.
3. J. Barwise and J. Seligman, Information Flow, Cambridge University Press 1997, ISBN 0-521-58386-1.
4. Chu Space Web Site:`http://chu.stanford.edu/`
5. Guide to Papers on Chu Spaces:`http://boole.stanford.edu/chuguide.html`
6. A Formal Concept Analysis Homepage:`http://php.indiana.edu/~upriss/fca/fca.html`

1 二項関係の双極定理

1.1 極対応

集合 A, X と 2 項関係 $\models \subseteq X \times A$ からなる組 $(A, X, \models)$ を**文脈**と呼ぶ。以下、文脈 $(A, X, \models)$ を一つ固定する。

$(x, a) \in \models$ のとき $x \models a$ と書く。

集合 A の部分集合 B の**極集合**（polar set）とは、次のような X の部分集合 B^* である：

$$B^* := \left\{ x \;\middle|\; x \models b \quad \forall b \in B \right\}.$$

同様に X の部分集合 Y の**極集合** Y^* を、次のように定義する：

$$Y^* := \left\{ a \;\middle|\; y \models a \quad \forall y \in Y \right\}.$$

また、A の元 a について、$\{ a \}^*$ を単に a^* と書き、X の元 x について、$\{ x \}^*$ を単に x^* と書く。定義より

以下、$B^{**} := (B^*)^*$ などと書く。

命題 1.1.1 集合 A の部分集合 B, B_1, B_2, 集合 X の部分集合 Y に対して、

(1) $B^* = \bigcap_{b \in B} b^*$,

(2) $Y \subseteq B^* \Leftrightarrow B \subseteq Y^*$,

(3) $B_1 \subseteq B_2$ ならば $B_1^* \supseteq B_2^*$,

(4) $B \subseteq B^{**}$,

(5) $B^* = B^{***}$.

証明. *(1).*

$$x \in B^* \Leftrightarrow \text{すべての } b \in B \text{ について } x \models b.$$

ところが $x \in b^*$ は $x \models b$ のことだから

$$x \in B^* \Leftrightarrow \text{すべての } b \in B \text{ について } x \in b^*.$$

すなわち、

$$x \in B^* \Leftrightarrow x \in \bigcap_{b \in B} b^*.$$

(2)

$$\begin{aligned} Y \subseteq B^* &\Leftrightarrow \forall y \in Y\ [y \in B^*] \\ &\Leftrightarrow \forall y \forall b\ [y \models b] \\ &\Leftrightarrow \forall b \forall y\ [y \models b] \\ &\Leftrightarrow \forall b\ [b \in Y^*] \\ &\Leftrightarrow B \subseteq Y^*. \end{aligned}$$

(3) $B_1 \subseteq B_2$ とする。$y \in B_2^*$ とする。$b \in B_1$ ならば $b \in B_2$ だから $y \models b$ となる。従って、$y \in B_1^*$. ゆえに $B_2^* \subseteq B_1^*$.
(4). $b \in B$ とする。$y \in B^*$ ならば、定義より $y \models b$. 従って $b \in (B^*)^*$. よって $B \subseteq B^{**}$.
(5). *(4)* より $B \subseteq B^{**}$. 従って、*(3)* より $B^* \supseteq B^{***}$. 一方、*(4)* と同様のことが X の部分集合 B^* についても成立するので、$B^* \subseteq B^{***}$. 以上より、$B^* = B^{***}$. ∎

定義 1.1.2 $Y^{**} = Y$ を満たす Y は $(-)^{**}$ について閉じている（単に閉じている）といい、閉集合とも呼ぶ。

$$\Gamma(X) := \left\{ Y \subseteq X \;\middle|\; Y^{**} = Y \right\}$$
$$\Gamma(A) := \left\{ B \subseteq A \;\middle|\; B^{**} = B \right\}.$$

以下、$\mathcal{X} := \Gamma(X)$, $\mathcal{A} := \Gamma(A)$ と書く。

例 1.1.3 X を体 K 上の有限次元ベクトル空間、$A = X^*$ を双対空間とし、

$$x \models a \overset{def}{\Longleftrightarrow} a(x) = 0$$

と定義する。このとき、部分集合 $Y \subseteq X$ に対し、Y^{**} は Y が張る部分空間を表す。$\mathcal{X}$ は X の部分空間の全体のなす完備束, $\mathcal{A}$ は A の部分空間の全体のなす完備束となり、$W \mapsto W^{\perp}$ が、完備束としての反同形 $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$ を与える。

命題 1.1.4 *(1)* $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{pow}\,(X)$ は $\bigcap$-*closed* である。すなわち、$Y_i \in \mathcal{X}$ ならば $\bigcap_i Y_i \in \mathcal{X}$. 従って、$\mathcal{X}$ は完備束。

(2) 同様に $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{pow}\,(A)$ も $\bigcap$-*closed* で完備束となる。

証明. $Y_i \in \mathcal{X}$ $(i \in I\,)$ を閉集合の族とし、$Y := \bigcap_{i \in I} Y_i$ と置く。$i \in I$ に対し $Y \subseteq Y_i$ より $Y^{**} \subseteq Y_i^{**} = Y_i$. 従って、$Y^{**} \subseteq \bigcap_{i \in I} Y_i = Y$. 一方 $Y \subseteq Y^{**}$. 以上より $Y = Y^{**}$.
Y_i の $\mathbf{pow}\,(X)$ での下限である $\bigcap_i Y_i$ が $\mathcal{X}$ に属すときは、それは Y_i の $\mathcal{X}$ での下限でもある。従って、$\mathcal{X}$ の任意の部分集合が下限を持つことがわかり、$\mathcal{X}$ は完備となる[1]。 ∎

定理 1.1.5 $\mathcal{X} \xrightarrow{*} \mathcal{A}$ は順序集合の反同形[2]。その逆写像は $\mathcal{A} \xrightarrow{*} \mathcal{X}$

証明. 示すべきことは、$Y \in \mathcal{X}$ ならば $Y^* \in \mathcal{A}$ となることだが、$Y^{***} = Y^*$ より正しい。$*$ が互いに逆であることは、$\mathcal{X}$,$\mathcal{A}$ が $^*{**}$ の固定点集合であることから明らか。また、命題 1.1.1 より順序が逆転する。 ∎

系 1.1.6

$$(\bigwedge_i Y_i)^* = \bigvee_i Y_i^* \qquad (\bigvee_i Y_i)^* = \bigwedge_i Y_i^*.$$

とくに

$$\bigvee_i Y_i = (\bigwedge_i Y_i^*)^* = (\bigcap_i Y_i^*)^*.$$

証明. * が順序集合の間の反同形（順序を逆転する全単射）なので、下限は上限に、上限は下限に移る。 ∎

なお、$\mathcal{X}$ における上限は、それ自身の言葉で以下のように書くことができる。

命題 1.1.7

$$\bigvee_i Y_i = (\bigcup Y_i)^{**}.$$

[2] $\mathcal{A}^{op}$ への写像として順序同形

証明. $\left\{ Y_i \;\middle|\; i \in I \right\} \subseteq \mathcal{X}$ とし、$Y := (\bigcup_{i \in I} Y_i)^{**}$ とおく。Z が $\{ Y_i \}$ の上界、すなわち、すべての $i \in I$ について $Y_i \subseteq Z$ であるとする。このとき $\bigcup_{i \in I} Y_i \subset Z$. 従って、$Y \subseteq Z^{**} = Z$. 従って、$Y$ は、$\{ Y_i \}$ のどの上界よりも小さい。しかし、一方、$Y_i \subseteq Y$. 従って、Y は $\{ Y_i \}$ の最小上界、つまり、上限、である。 ▮

補題 1.1.8 $\mathcal{X}$ は $\left\{ a^* \;\middle|\; a \in A \right\}$ により $\bigwedge$-*generated.* 実際、$Y \in \mathcal{X}$ は

$$Y = \bigcap_{b \in Y^*} b^*$$

と表示される。

証明. $Y = Y^{**} = \bigcap_{b \in Y^*} b^*$. ▮

例 1.1.9 自然数の一部 $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$ について、性質 $A = \{ a, b, c, d, e \}$ を考える。ただし、*a:*偶数, *b:*３で割って余りが１, *c:*素数,*d:*平方数,*e* １０を法として平方数. このとき、２項関係

$$x \models \alpha \overset{def}{\iff} \text{数 } x \text{ は性質}\alpha\text{を持つ}$$

は以下の表で表せる。ただし、$x \models \alpha$ のときに x 行 α 列の升目に 1 と書く。

	a	b	c	d	e
1		1		1	1
2	1				
3			1		
4	1	1		1	1
5			1		1
6	1				1
7		1	1		
8	1				
9				1	1
10	1				1

表 1: 文脈の例

$\mathcal{X}$ の計算　まず、各元の極集合を求める。

$$a^* = 24680, b^* = 147, c^* = 357, d^* = 149, e^* = 14560.$$

（10 は 0 で表す。また、$2469 = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ など。）　これらを $\mathcal{X}_1$ とする。

次にこれらの交わりを求める。

$$(ab)^* = a^* \bigcap b* = 4, (ac)^* = \emptyset, (ad)^* = 4, (ae)^* = 460$$

$$(bc)^* = 7, (bd)^* = 14, (be)^* = 14, (cd)^* = \emptyset, (de)^* = 149.$$

新しく得られたものを $\mathcal{X}_2$ とすると、

$$\mathcal{X}_2 = \{\ \emptyset, 4, 7, 14, 460\ \}.$$

$\mathcal{X}_1$ と $\mathcal{X}_2$ の交わりで新たなものは出てこないし、$\mathcal{X}_2$ の元同士の交わりでも新たなものは出てこない。従って、$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \bigcup \mathcal{X}_2$ となる。

$\mathcal{A}$ の計算 同様に、各元の極集合から始める：

$$1^* = bde, 2^* = a, 3^* = c, 4^* = abde, 5^* = ce, 6^* = ae, 7^* = bc, 8^* = a, 9^* = de, 0^* = ae.$$

従って

$$\mathcal{A}_1 = \{\ abde, bde, ae, bc, ce, de, a, c\ \}.$$

$$\mathcal{A}_2 = \{\ b, e\ \}.$$

よって、

$$\mathcal{A} = \{\ abde, bde, ae, bc, ce, de, a, b, c, e\ \}.$$

束 $\mathcal{X}, \mathcal{A}$ は図 *1* で表される。

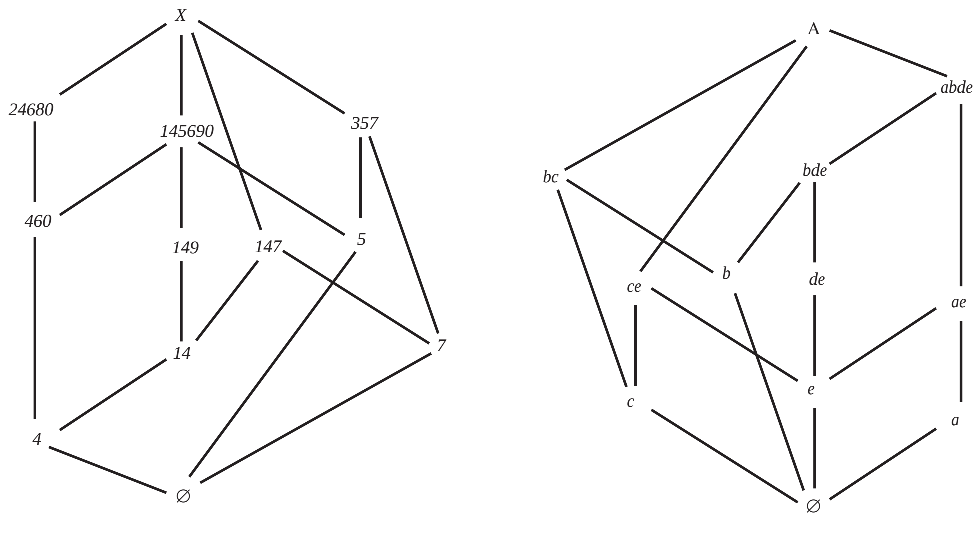

図 1: $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$

これらを同じ束に合わせると図 *2* で表される。

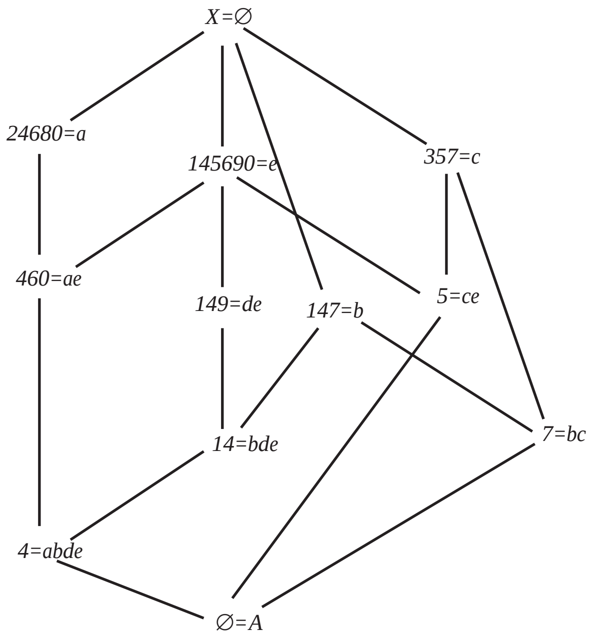

図 2: ガロア束の例