2001 年度後期 形式概念解析入門　　資料 2001.10.11 Ver. 1.0,
http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/am01.html

目 次

1 二項関係の双極定理（続）

1.2 数学に表れる例

1.2.1 ガロア理論

K を $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大とし、$G = Aut(K/\mathbb{Q})$ を自己同形群とする。

$$x \models g \overset{def}{\Longleftrightarrow} x^g = x$$

とおく。このとき、文脈 $(K, G, \models)$ について、

$$\Gamma(K) = \left\{ L \;\middle|\; \mathbb{Q} \subseteq L \subseteq K \text{ は部分体} \right\}$$

$$\Gamma(G) = \left\{ H \;\middle|\; H \subseteq G \text{ は部分群} \right\}$$

そして、$L^* = Aut(K/L)$, $H^* = K^H$ で、ガロアの基本定理は、

1. 部分集合 $Z \subseteq K$ に対し Z^{**} は Z が生成する部分体。
2. 部分集合 $C \subseteq G$ に対し C^{**} は C が生成する部分群。

1.2.2 ヒルベルトの零点定理

$X=\mathbb{C}^n$ を複素 n 次元空間 , $A=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ を n 変数の多項式環とする。

$$(a_1,\cdots,a_n)\models f(x_1,\cdots,x_n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(a_1,\cdots,a_n)=0$$

と定義する。

$Y\subseteq X$ にたいし、Y^* は Y 上でゼロとなる多項式のなすイデアル、$B\subseteq A$ に対し、B^* は B の共通ゼロ点集合となる。このとき

- Y^{**} は Y を含む最小の代数的集合。
- B^{**} は B^* 上でゼロとなる多項式の全体。ヒルベルトの零点定理により

  $$B^{**}=\sqrt{I(B)}.$$

  ただし、$I(B)$ は B が生成するイデアル, $\sqrt{I}$ は I の根基[1].

双極定理より、代数的集合の完備束と、$\sqrt{J}=J$ を満たすイデアルの全体がなす完備束が反同形となることがわかる。

1.2.3 命題論理の完全性

V を命題変数の集合とし、それから定まる命題論理式の全体を A とする。$X:=2^V$ $(2=\{0,1\})$ とする。$x\in X$ は、各命題変数への真偽値の割当となるので、真偽関数 $x:A\to 2$ と１対１に対応する。ただし、x が真偽関数とは次を満たすもの。

$$\begin{array}{rcl} x(\neg p) &=& 1-x(p), \\ x(p\ \wedge\ q) &=& \min\{\,x(p),x(q)\,\}, \\ x(p\ \vee\ q) &=& \max\{\,x(p),x(q)\,\}, \\ x(p\Rightarrow q)=0 &\overset{def}{\Longleftrightarrow}& x(p)=1 \text{ かつ } x(q)=0. \end{array}$$

ここで、文脈 $(X,A,\models)$ を

$$x\models\varphi \overset{def}{\Longleftrightarrow} x(\varphi)=1$$

と定義すると、 解釈 x の極集合 x^* は x において正しい命題の全体で、「理論」となる。

ただし、命題論理式の集合 J が理論であるとは、次の性質を満たすことを言う。

- トーロジーは J の元、
- $p\in J$, $p\to q\in J$ ならば $q\in J$、

[1] $\sqrt{I}:=\quad x\quad$ ある $n\geq 1$ について $x^n\in I$

- $p, q \in J$ ならば $p \wedge q \in J$.

φ^* は命題 φ が正しくなるような解釈の全体。

$\Gamma(A)$ は、命題理論の全体と一致する。

論理式の集まり $\Phi = \{ \varphi_1, \cdots, \varphi_n \}$ に対し、Φ^* は、これらの論理式すべて正しくなるような解釈の全体を表すので、Φ^{**} は、命題論理の完全性により、Φ を公理として、命題論理の推論規則により得られる定理の全体と一致する。

$\Gamma(X)$ の元は、命題論理式の集合 $B \subseteq A$ の極集合 B^* となる。つまり、B に属する論理式がすべて正しくなるような解釈の全体である。

これは $X = 2^V$ に積位相（2 には離散位相）についての閉集合となる。この中で、B が有限集合の時は、$B^* = (\bigwedge B)^*$ となるので、一つの命題論理式 の極集合となる。命題論理式に出現する変数は有限個なので、それは積位相の開集合の基となると同時に閉集合の基（任意の閉集合は、それらの交わりとして表示される）でもある。

一般の $Y \subset 2^V$ について Y^{**} は、Y の閉包となる。

1.2.4 ゲーデルの完全性定理

１階の言語 L を固定する。X を L-構造の「全体」（集合とは限らない）とし、A を L-sentense の全体とする。$x \models \varphi$ を通常のモデル理論の意味で定義する。このとき、

- $Y \subseteq X$ に対し、Y^* は、Y に属するすべての構造で成り立つ論理式の全体。これは、通常の推論規則による推論で閉じている（そういう部分集合を「理論」と呼ぶ）。
- $B \subseteq A$ に対し、B^* は B のモデル全体。

定理 1.2.1 (ゲーデルの完全性定理) B^{**} は B から導かれる定理の全体と一致する。

問題 1.2.2 １階の構造の集合 Y について、Y^{**} を、構造の言葉だけで記述せよ。

2 束と完備束の基本概念

2.1 順序関係の基礎概念

定義 集合 X 上の 2 項関係 $x \preceq y$ が順序関係であるとは、次の 3 条件を満たすことを言う：

(反射律) $x \preceq x.$

(推移律) $x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ ならば $x \preceq z.$

(反対称律) $x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ ならば $x = y.$

「$x \preceq y$ 」を「y は x 以上」、「x は y 以下」と言う。$x \preceq y$ かつ $x \neq y$ のとき、「y は x より大きい」、「x は y より小さい」と言い、$x \prec y$ と書く。

集合に順序関係を一つ与えたものを順序集合 (partially ordered set 略して **poset**) という。

順序関係 $\preceq$ に対し

$$x \preceq^* y \overset{def}{\iff} y \preceq x$$

も順序関係である。$P^o := (X, \preceq^*)$ を $P = (X, \preceq)$ の **双対**という。

主な例

- 集合 X のべき集合 **pow** (X) は包含関係により順序集合。
- アルファベット Σ 上の語の全体 Σ^* は、w が v の接頭語であるときに $w \sqsubseteq v$ と定義することにより順序集合となる。Σ^* は空語 Λ を含むとする。
- 命題変数 V から形成される命題論理式の論理同値類 $Prop(V)$ は

  $$p \preceq q \overset{def}{\iff} p \Rightarrow q \text{ がトートロジー}$$

  により順序集合となる。

最大と極大 $(X, \preceq)$ を順序集合とする。M が、X のどの元よりも大きいか等しいとき、M を X の**最大元**(the greatest element) であるという。最大元は存在すれば唯一。

M より大きな元が存在しないとき、M を**極大元**(a maximal element) であると言う。

双対概念として、最小元（the least element)、極小元 (a minimal element) が定義される。

最大元が存在するとき、それを $\top$(トップと呼ぶ)、最小元が存在するとき、それを $\perp$(ボトムと呼ぶ) と書く。(1, 0 と書くときもある。)

上限の概念　$(X, \preceq)$ を順序集合とする。A を X の部分集合とする。A のどの元よりも大きいか等しいような元を A の上界（upper bound) という。A の上界の全体を $\uparrow A$ と書く[2]

A の最小上界を A の**上限**(supremum,join) といい、$\bigvee A$ と書く。$\{ a, b \}$ の上限は $a \vee b$ とも書く。$\bigvee \emptyset$ は最小元を意味する。

補題 2.1.1 m が A の上限であるために必要かつ十分な条件は、任意の $x \in X$ について、

$$\frac{m \preceq x}{A\text{ の任意の元 }a\text{ について }a \preceq x},$$

すなわち、「x が A の上界である」という条件と「$m \preceq x$」 とが同値となること。

上限の双対概念が**下限**(infinimum, meet) である。下限は $\bigwedge A$, $a \wedge b$ と書く。

例

- べき集合 $\mathbf{pow}\,(X)$. $A = \left\{ x_i \;\middle|\; i \in I \right\}$ のとき、
$$\bigvee_i x_i = \bigcup_i x_i \qquad \bigwedge_i x_i = \bigcap_i x_i.$$
- 語の集合 Σ^*. $A \subseteq \Sigma^*$ のとき、$\bigvee A$ が存在するのは、ある元 $w \in A$ があって、他の元は w の prefix となっているとき。A が空でなければ、$\bigwedge A$ は共通の prefix で、「空語」があるので存在する。
- 命題論理式の論理同値類 $Prop(V)$ では、$[p], [q] \in Prop(V)$ に対し、
$$[p] \bigwedge [q] = [p \wedge q],$$
$$[p] \bigvee [q] = [p \vee q].$$

2.2　束と完備束

どの部分集合も上限と下限を持つとき、順序集合は**完備束**(complete lattice) と呼ばれる。どの有限部分集合も上限と下限を持つような順序集合を**束**(lattice) という。

どの部分集合も上限をもつような順序集合を**完備上半束（complete upper semi-lattice）**という。どの有限部分集合も上限をもつような順序集合を**上半束（upper semi-lattice）**という。

命題 2.2.1 どの部分集合も下限をもつてば、その順序集合は完備となる。

証明. 順序集合 $(X, \preceq)$ が完備上半束であるとする。A を任意の集合とするとき

$$\bigwedge A = \bigvee \downarrow A.$$

∎

[2]空集合の上界集合 $\uparrow \emptyset$ は全体集合 X とする。

完備束の例１:べき集合　べき集合 $(\mathbf{pow}\,(X), \subseteq)$ は完備束。

完備束の例２：$\bigcap$-closed な集合族　集合族 $\mathcal{Y} \subseteq \mathbf{pow}\,(X)$ が $\bigcap$-closed であるとは、$y_i \in \mathcal{Y}$ ならば、$\bigcap_i y_i \in \mathcal{Y}$ となることをいう。

命題 2.2.2 *$\bigcap$-closed な部分集合 $\mathcal{Y} \subseteq \mathbf{pow}\,(\mathcal{X})$ は完備で、*

$$\bigwedge_i A_i = \bigcap_i A_I, \quad \bigvee_i A_i = \overline{\bigcup_i A_i}.$$

ただし、

$$\overline{B} = \bigcap_{Y \in \mathcal{Y},\, Y \supseteq B} Y.$$

たとえば、位相空間の閉集合の全体は $\bigcap$-closed なので完備となる。閉集合族 $\left\{ A_i \;\middle|\; i \in I \right\}$ の上限 $\bigvee_i A_i$ は合併集合 $\bigcup_i A_i$ の閉包となる。

同様のことは、$\bigcup$-closed な集合族についても成り立つ。たとえば開集合族は $\bigcup$-closed なので完備となる。

束の例：命題論理式の論理同値類