抽象概念解析入門第３回

- 束の基本概念

Last modified 2001/10/25

順序関係の定義

集合 X 上の 2 項関係 $x \preceq y$ が順序関係 $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$

(反射律) $x \preceq x.$

(推移律) $x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ ならば $x \preceq z.$

(反対称律) $x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ ならば $x = y.$

$(X, \preceq)$:順序集合 $(\mathbf{poset})$

双対順序関係 $\preceq^*$:

$$x \preceq^* y \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} y \preceq x.$$

$P^o := (X, \preceq^*)$: 順序集合 $P = (X, \preceq)$ の **双対**.

例

- べき集合. $(\mathbf{pow}\ (X), \subseteq)$
- $(\mathbb{N}, |)$:自然数の集合と整除関係.

$$n \preceq m \overset{def}{\Longleftrightarrow} n \text{ は } m \text{ を割り切る.}$$

- $(\mathbb{Z}_+, |)$：非負整数全体と整除関係。$0 \preceq 0$ と定義。
$a \neq 0$ のとき $a \preceq 0$.
- 語の集合. Σ^*: アルファベット Σ 上の有限語の集合.

$$w \sqsubseteq v \overset{def}{\Longleftrightarrow} w \text{ が } v \text{ の接頭語.}$$

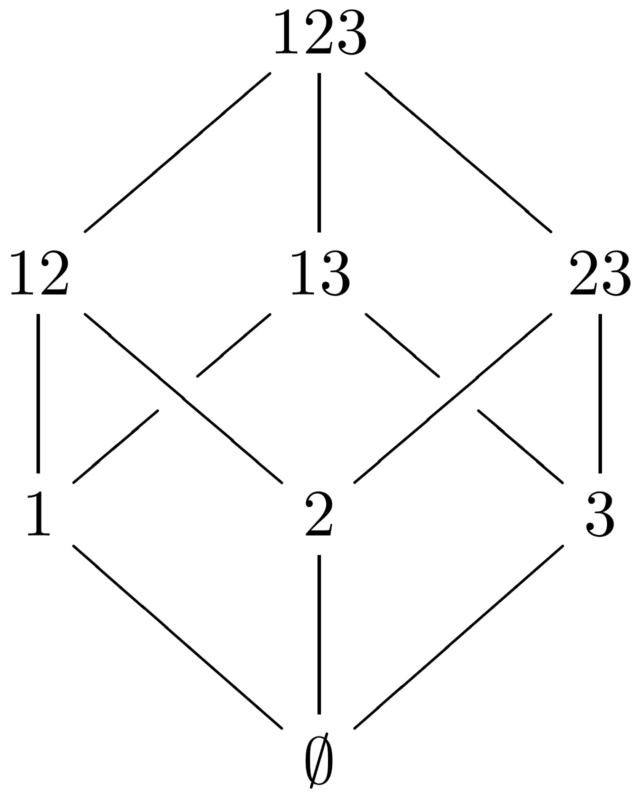
注意：Σ^* は空語 Λ を含む.

- 命題論理式の論理同値類. $Prop(V)$

$$p \preceq q \overset{def}{\iff} p \Rightarrow q \text{ がトートロジー}$$

べき集合 pow (X) の Hasse 図

ただし，例えば 12 は集合 $\{\ 1,2\ \}$ を表す.



最大と極大

$(X, \preceq)$:順序集合.

- M が X の**最大元**(the greatest element) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in X[x \preceq M]$
  最大元は存在すれば唯一。存在するとは限らない。
- M が X の**極大元**(a maximal element) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ M より大きな元が存在しない
- 双対概念：最小元（the least element), 極小元 (a minimal element) .
- 最大元の記号：$\top$,1.
- 最小元の記号：$\perp$,0.

上限の概念

$(X, \preceq)$:順序集合, $A \subseteq X$ とする。

- x が A の $\boxed{\text{上界}}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a \in A$ ならば $a \preceq x$.
- $\boxed{\uparrow A}$:A の上界の全体.
  $X := \uparrow \emptyset$.
- $\boxed{\bigvee A}$ $:=$ A の最小上界.
  A の $\boxed{\textbf{上限}}$(supremum,join) と呼ぶ（存在するとは限らない)。
  - $a \vee b := \bigvee \{ a, b \}$.
  - $\bigvee \emptyset$ は最小元.
- 双対概念：**下限**(infinimum, meet), $\bigwedge A$,$a \wedge b$.

補題

$m = \bigvee A$ は以下と同値：

$$\frac{m \preceq x}{A \text{ の任意の元 } a \text{ について } a \preceq x}.$$

べき集合 $\mathbf{pow}\,(X)$ での上限と下限

$A = \left\{ x_i \;\middle|\; i \in I \right\}$ のとき、

$$\bigvee_i x_i = \bigcup_i x_i$$

$$\bigwedge_i x_i = \bigcap_i x_i.$$

証明

合併集合の特長付け

$$\forall i[x_i \subseteq y] \Leftrightarrow \bigcup_i x_i \subseteq y.$$

より

自然数と整除関係での上限は最小公倍数

$a, b \in \mathbb{N}$ のとき、

- $a \bigvee b$ は a, b の最小公倍数。
- $a \bigwedge b$ は a, b の最大公約数。

語の集合 Σ^* での上限と下限

$A \subseteq \Sigma^*$ のとき、

- $\bigvee A$ が存在 $\Leftrightarrow$ A の元は、ある一つ語の prefix.
  $\bigvee A$ が存在しない方が普通。
- A が空でないとき　$\bigwedge A = \Lambda$.

$Prop(V)$ での下限は論理積

$[p], [q] \in Prop(V)$ に対し、

$$[p] \bigwedge [q] = [p \wedge q].$$

証明. 任意の論理式 r に対し

$$[r] \preceq [p] \text{ かつ } [r] \preceq [q]$$

$$r \Rightarrow p \text{ かつ } r \Rightarrow q$$

$$r \Rightarrow p \wedge q$$

$$[r] \preceq [p \wedge q]. \blacksquare$$

有限個の論理式 $p_1, \cdots, p_n$ についても

$$\bigwedge_i [p_i] = [p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n.$$

「無限論理」では無限個の論理式の下限も存在。

$Prop(V)$ での上限は論理和

$[p], [q] \in Prop(V)$ に対し、

$$[p] \bigvee [q] = [p \vee q].$$

証明. 任意の論理式 r に対し

$$[p] \preceq [r] \text{ かつ } [q] \preceq [r]$$

$$p \Rightarrow r \text{ かつ } q \Rightarrow r$$

$$p \vee q \Rightarrow r$$

$$[p \vee q] \preceq [r]. \blacksquare$$

有限個の論理式 $p_1, \cdots, p_n$ についても

$$\bigvee_i [p_i] = [p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n].$$

「無限論理」では無限個の論理式の上限も存在。

完備性の定義

- 順序集合が**完備束** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ すべての部分集合が上限と下限を持つ。
- 順序集合が**完備上半束** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ すべての部分集合が上限を持つ。
- 順序集合が**完備下半束** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ すべての部分集合が下限を持つ。

命題. 完備束 $\Leftrightarrow$ 完備上半束 $\Leftrightarrow$ 完備下半束

証明. 順序集合 $(X, \preceq)$ が完備上半束とする。A を任意の集合とするとき　$A = \quad \downarrow A.$ ■

束の定義

- 順序集合が**束** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ すべての有限部分集合が上限と下限を持つ。
- 順序集合が**上半束** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ すべての有限部分集合が上限を持つ。
- 順序集合が**下半束** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ すべての有限部分集合が下限を持つ。

命題. 有限順序集合については束 $\Leftrightarrow$ 上半束 $\Leftrightarrow$ 下半束.

$(\mathbb{N}, |)$ は、上半束だが束ではない（最大限がない）。

完備束の例

- べき集合 $(\mathbf{pow}\,(X), \subseteq)$ は完備束。
- $(\mathbb{Z}_+, |)$.

完備束の例２：$\bigcap$-closed な集合族

- 集合族 $\mathcal{Y} \subseteq \mathbf{pow}\,(X)$ が $\bigcap$-closed $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$
$\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$ ならば、$\bigcap \mathcal{Z} \in \mathcal{Y}$
ただし、$\bigcap \emptyset = X$ と約束する。従って、$\bigcap$-closed な集合族は全体集合を含んでいる。

命題 $\bigcap$-closed な部分集合族 $\mathcal{Y} \subseteq \mathbf{pow}\,(\mathcal{X})$ は完備で

- $\bigwedge_i A_i = \bigcap_i A_i$
- $\bigvee_i A_i = \overline{\bigcup_i A_i}$.

ただし、

$$\overline{B} = \bigcap_{Y \in \mathcal{Y},\, Y \supseteq B} Y.$$

完備束の例２－１：線形部分空間の完備束

- $Sub(V)$ をベクトル空間 V の部分空間の全体。
- $Sub(V)$ は $\bigcap$-closed. (部分空間族の交わりは部分空間となるから）
- $Sub(V)$ は完備束。
- $\bigwedge_i V_i = \bigcap_i V_i$.
- $\bigvee_i V_i = \Sigma_i V_i$:$V_i$ の和空間。

（証明：部分集合 A を含む最小の部分空間は、A が張る部分空間）

完備束の例２－２：部分群の完備束

- $Sub(G)$ を群 G の部分群の全体。
- $Sub(G)$ は $\bigcap$-closed. (部分群の交わりは部分群となるから)
- $Sub(G)$ は完備束。
- $\bigwedge_i H_i = \bigcap_i H_i$.
- $\bigvee_i H_i$ は $\bigcup_i H_i$ が生成する部分群。

（証明：部分集合 A を含む最小の部分群は、A が生成する部分群）

完備束の例２－３：位相空間の閉集合族

位相空間 X の閉集合の全体 $\mathcal{A}(X)$ は、$\bigcap$-closed だから完備束。ただし、上限は

$$\bigvee_i A_i = \overline{\bigcup_i A_i}.$$