閉包作用素と同値な構造

- 閉包作用素の定義と例
- 閉包作用素と同等の数学的概念
  - 交叉集合族と閉包作用素
  - 単純論理と閉包作用素
  - 束への写像と閉包作用素

閉包作用素の定義

X:集合

写像 $C : \mathbf{pow}\,(X) \to \mathbf{pow}\,(X)$ が閉包作用素

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $E, F \subseteq X$ に対し、以下が成立：

- 増大性: $E \subseteq CE$,
- 単調性: $E \subseteq F$ ならば $CE \subseteq CF$,
- ベキ等性: $CCE = CE$.

基本的な性質

1. $E \subseteq F \subseteq CE$ ならば $CF = CE$.
2. $C(E \cup F) = C(CE \cup F)$.
3. $C(\bigcup_i E_i) = C\left(\bigcup_i CE_i\right)$.

証明　(1) 単調性とべき等性より.

(2) $E \cup F \subseteq CE \cup F \subseteq C(E \cup F)$ と (1) から。

(3) (2) と同様　$\blacksquare$

閉包作用素の例

- X は平面. CE は E の凸包.
- X はベクトル空間. CE:E が張る部分空間.
- X は群. CE:E の生成する部分群.
- X は命題論理式の全体. CE は E から証明できる論理式の全体.
- X は位相空間. CE は E の閉包.
- X は有向グラフの頂点集合. CE は E から到達可能な頂点の集合.

宿題　他に例を挙げよ。

交叉集合の定める閉包作用素

$\mathcal{A} \subseteq \mathbf{pow}\,(X)$ ：交叉集合族（前回の言葉：$\bigcap$-closed）

$$C_{\mathcal{A}}(E) := \bigcap_{A \in \mathcal{A}, A \supseteq E} A.$$

命題 1

$C_{\mathcal{A}}$ の値は $\mathcal{A}$ に属する。（$\because$ $\mathcal{A}$ の交叉性定義）

$C_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ に属する部分集合を変えない。（自明）

$C_{\mathcal{A}}$ は閉包作用素である。（$\because$ 上の 2 つよりべき等。他は自明）

閉包作用素についての閉集合

$C : \mathbf{pow}\ (X) \to \mathbf{pow}\ (X)$ を閉包作用素とする。

E が C-閉集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $CE = E$

$\mathcal{A}_C$: C-閉集合の全体.

命題 2 $\mathcal{A}_C$ は交叉集合族である。

証明. C-閉集合 $E_i (i \in I)$ に対し $C(\bigcap_i E_i) \subseteq CE_i = E_i$ より

$$C(\bigcap_i E_i) \subseteq \bigcap_i E_i.$$

逆の包含関係が増大性から成り立つので $\bigcap_i E_i$ は閉集合となる。 $\blacksquare$

交叉集合族と閉包作用素の間の全単射

つぎは互いに逆：

$$\text{交叉集合族} \;\leftrightarrow\; \text{閉包作用素}$$

$$\mathcal{A} \longrightarrow C_{\mathcal{A}}$$

$$\mathcal{A}_C \longleftarrow C$$

証明. 交叉集合族 $\mathcal{A}$ に対し、$C_{\mathcal{A}}E = E \Leftrightarrow E \in \mathcal{A}$ より、$\mathcal{A}_{C_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$.
閉包作用素 C に対し、$C_{\mathcal{A}_C}(E) = \bigcap_{A=CA, E\subseteq A} A$. $CCE = CE, E \subseteq CE$ より、右辺の A の中に CE が含まれているので、$C_{\mathcal{A}_C}(E) \subseteq CE$. 逆に、$E \subseteq A$ ならば、$CE \subseteq CA = A$. 従って、CE は右辺の各 A に含まれるので

$$CE \subseteq C_{\mathcal{A}_C}E.$$

任意の集合族からつくる閉包作用素

空でない集合族 $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{pow}\,(X)$ は交叉集合族を生成する：

$$\overline{\mathcal{B}} := \left\{ \bigcap \mathcal{F} \;\middle|\; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

（これは $\mathbf{pow}\,(\mathbf{pow}\,(X))$ の閉包作用素となっている！）

$C_{\mathcal{B}} E := \bigcap_{B \in \mathcal{B}, B \supseteq E} B$ 　は閉包作用素。

生成系

$\tau \subseteq \mathbf{pow}\,(X) \times X$：**有向ハイパーグラフ**.

$(\Gamma, x) \in E$ を $\Gamma \rightarrow_{\tau} a$ と書く（以下 $\Gamma \rightarrow a$ と略す)。

- τ が反射的 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\dfrac{}{x \rightarrow x}$ $(\forall x \in X)$.
- τ が単調的 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\dfrac{\Gamma \rightarrow x}{\Gamma, \Delta \rightarrow x}$.
- τ が推移的 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\dfrac{\Gamma_i \rightarrow x_i (i \in I) \quad \left\{\, x_i \;\middle|\; i \in I \,\right\} \rightarrow x}{\bigcup_i \Gamma_i \rightarrow x}$.

定義

X **上の生成的有向グラフ**：上の３条件を満たす有向ハイパーグラフ. (X,τ):生成系 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ τ は X 上の生成的有向グラフ

$\Gamma{\to}_\tau a$ のとき「Γ **が** a **を生成する**」という。

生成系の例

- X ベクトル空間.
  $\Gamma{\to}x \overset{def}{\Longleftrightarrow} x$ は Γ の一次結合
- X 命題論理式の全体.
  $\Gamma{\to}x \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 公理系 Γ から x が証明できる

関数族が定める生成系（関数従属関係） *12*

X を Z 上の実関数族 $\left\{ f_x \;\middle|\; x \in X \right\}$ とする。

$$\Gamma \to_\tau a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in X[f_x(z) = f_x(z')] \to f_a(z) = f_a(z')]$$

（f_a は $\left\{ f_x \;\middle|\; x \in \Gamma \right\}$ に従属する.）$h : R^\Gamma \to R$ があって
$f_a(z) = h((f_\gamma(z)|\gamma \in \Gamma)$ と書ける。

命題 3 τ は生成系である。

生成系が定める閉包作用素

(X,τ) を生成系とする。

定義. $C_\tau E := \left\{ x \;\middle|\; \Gamma \to x, \Gamma \subseteq E \right\}$: E の一部で生成できる元の全体.

命題 4 $C_\tau : \mathbf{pow}\,(X) \to \mathbf{pow}\,(X)$ は閉包作用素.

証明 べき等性だけ示せばよい。$x \in CCE$ とすると $\Gamma \subseteq CE$ があって $\Gamma \to x$. 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して $\Delta_\gamma \to \gamma$ となる $\Delta_\gamma \subseteq E$ がある。ゆえに、

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Delta_\gamma \to x,$$

となり、$x \in CE.$ となる. ∎

閉包作用素が定める生成系

命題 5 X 上の閉包作用素 C にたいしつぎは生成系.

$$\Gamma \to_C a \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \in C\Gamma.$$

証明 反射性 $\{ a \} \subseteq C\{ a \}$ より.

単調性 $CE \subseteq C(E \cup F)$ より。

推移性 $x \in C(\Gamma)$, $\gamma \in C(\Delta_\gamma)$ $(\forall \gamma \in \Gamma)$ とする。このとき、閉包作用素の基本的性質より

$$C(\Gamma) \subseteq C(\Gamma \bigcup \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Delta_\gamma) = C(\Gamma \bigcup \bigcup_{\gamma \in \Gamma} C(\Delta_\gamma)))$$

$$= C(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} C(\Delta_\gamma)) = C(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Delta_\gamma)$$

[redacted]

生成系と閉包作用素の全単射対応

つぎは互いに逆：

$$\text{生成有向グラフ} \leftrightarrow \text{閉包作用素}$$

$$\tau \longrightarrow C_\tau$$

$$\tau_C \longleftarrow C$$