2001 年度後期 形式概念解析入門　　資料 2001.11.1 Ver. 1.1,
http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/am01.html

3 閉包作用素（続き）

以下の 4 構造は同等な情報を持つ：

1. 交叉族 $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{pow}\,(X)$.
2. 閉包作用素 $C : \mathbf{pow}\,(X) \to \mathbf{pow}\,(X)$.
3. 生成系 $\tau \subseteq \mathbf{pow}\,(X) \times X$.
4. 束ラベル付 $\lambda : X \to L$.

対応

- 交叉族から閉包作用素: $C_{\mathcal{A}}E := \bigcap_{E \subseteq A \in \mathcal{A}} A$
- 閉包作用素から交叉族:$\mathcal{A}_C := \left\{ E \;\middle|\; CE = E \right\}$.
- 閉包作用素から生成系:$\Gamma \to_{\tau_C} a \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \in C\Gamma$.
- 生成系から閉包作用素:$C_\tau E := \left\{ a \;\middle|\; E \subseteq \exists \Gamma \to_\tau a \right\}$.
- 生成系から交叉族:$\mathcal{A}_\tau := \left\{ E \;\middle|\; E \subseteq \Gamma \to_\tau a \Rightarrow a \in E \right\}$.
- 交叉族から生成系:

$$\Gamma \to_{\tau_{\mathcal{A}}} a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall A \in \mathcal{A}[\Gamma \subseteq A \ \wedge\ \Gamma \to_\tau a \ \Rightarrow\ a \in A\,].$$

例 1　$X = \{\, a, b, c \,\}$..

- $\mathcal{A} := \{\, \emptyset, a, b, ac, abc \,\}$.
- $C : c \mapsto ac, ab \mapsto abc, bc \mapsto abc$ (他は固定)
- $c \to a,\ a, b \to c$ （他は自明なハイパー辺）

例 2 $X = \{ a, b, c, d \}$.

- $\mathcal{A} := \{ \emptyset, a, b, c, d, ab, cd, ac, bd, abc, abacd \}$.
- $C : ad \mapsto abcd, bc \mapsto abc, abd \mapsto abcd, acd \mapsto abcd, bcd \mapsto abcd$ (他は固定)
- $a, d \to b,\ a, d \to c,\ c, b \to a$ （他は自明なハイパー辺）

3.1 集合関数が生成する閉作用素

$D : \mathbf{pow}\ (X) \to \mathbf{pow}\ (X)$ を任意の写像とする。

気持ちとしては、D は、X の要素の集まりを使って他の物を作る作用を想定し、DA は A から D が１回で作れるもの全体と考える。

「D 作用１回で得られるもの全体」を表す作用素を

$$D_1 A := A \bigcup \bigcup_{B \subseteq A} DB.$$

と定義する。

補題 1 D_1 は単調で増大的、すなわち $E \subseteq D_1 E$ かつ $E \subseteq F$ ならば $D_1 E \subseteq D_1 F$.

$E \subseteq X$ に対し

$$D^* E := \bigcup D_1^m E$$

と定める。

命題 2 *1.* D^* は閉包作用素である。

2. D^* と D_1 とは固定点を共有する。すなわち

$$D^* E = E \Leftrightarrow D_1 E = E.$$

3. $D_1 E = E$ であるための必要十分条件は

$$B \subseteq E \Rightarrow DB \subseteq E.$$

証明. $D_1 D^* = D^*$ より、$D^* D^* = D^*$. D^* が単調で増大な作用素であることは明らか。よって D^* は閉包作用素。

また、$D^* E = E$ ならば $D_1 E = D_1 D^* E = D^* E = E$. 逆に $D_1 E = E$ ならば明らかに $D^* E = E$.

固定点についての最後の主張は自明。 ∎

3.2 ハイパーグラフが定める生成系

$\mathcal{E} \subseteq \mathbf{pow}\,(X) \times X$ を任意のハイパー有向グラフとする。

$$D_{\mathcal{E}}\Gamma := \left\{ a \;\middle|\; (\Gamma, a) \in \mathcal{E} \right\},$$

と置く。閉包作用素 $C_{\mathcal{E}} := D_{\mathcal{E}}^*$ を、ハイパー有向グラフ $\mathcal{E}$ が定める閉包作用素と呼ぶ。

$A \subseteq X$ が $\mathcal{E}$-closed であるとは、

$$\Gamma \subseteq A, \Gamma {\to}_{\mathcal{E}} x \Rightarrow x \in A.$$

また、$\mathcal{D} : \mathbf{pow}\,(\mathbf{pow}\,(X) \times X) {\to} (\mathbf{pow}\,(X) \times X)$ を、生成系の定義にある 3 条件の上辺のハイパー辺の集合に対し、その下辺のハイパー辺を集めるものとする。たとえば

1. $\mathcal{D}\emptyset = \left\{ a {\to} a \;\middle|\; a \in X \right\}$.
2. $\mathcal{D}(\{\, (\Gamma, a) \,\}) = \left\{ (\Gamma \bigcup \{\, x \,\}, a) \;\middle|\; x \in X \right\}$.
3. $\mathcal{D}(\{\, (\{\, a, b \,\}, c), (\{\, e, f \,\}, a) \,\}) = \{\, (\{\, e, f, b \,\}, c) \,\}$.

これが定める生成作用素を $\mathcal{D}^*$ とする。定義より、つぎがなりたつ。

命題 3 $\mathcal{D}^* X = X$ であるための必要十分条件は X が生成系であることである。

これより、$\mathcal{D}^*\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}$ を含む最小の生成系である。これを $\mathcal{E}$ が生成する生成系と呼び $\tau_{\mathcal{E}}$ と書く。$\Gamma {\to}_{\tau_{\mathcal{E}}} a$ を $\Gamma {\to}_{\mathcal{E}}^* a$ とも書く。

補題 4 A が $\mathcal{E}$*-closed* であることと $\mathcal{D}\mathcal{E}$*-closed* であることは同値。

証明. A が $\mathcal{D}\mathcal{E}$-closed であれば、もちろん $\mathcal{E}$-closed.

逆に A が $\mathcal{E}$-closed であるとする。このとき、$\mathcal{D}\mathcal{E}$ の元で、新たに加わるものの中で、$a {\to} a$, $\Gamma, a {\to} x$ については、A は closed.

最後に

$$\frac{\Gamma {\to}_{\mathcal{E}} a \quad \Delta, a {\to}_{\mathcal{E}} b}{\Gamma, \Delta {\to} b}$$

で上辺が $\mathcal{E}$ に入っているので

$\Gamma, \Delta {\to} b \in \mathcal{D}\mathcal{E}$ が得られたとする。

A が $\mathcal{E}$-closed で、

$$\Gamma \bigcup \Delta \subseteq A$$

とする。このとき、まず $a \in A$ となる。従って $\Delta \bigcup \{ a \} \subseteq A$ より、$b \in A$ となる。

以上より、A は $\mathcal{DE}$-closed となる。 ∎

系 5 *A が $\mathcal{E}$-closed であることと $\tau_{\mathcal{E}}$-closed であることとは同値。*

命題 6 *$C_{\mathcal{E}}$ が定める生成系は $\tau_{\mathcal{E}}$ となる。*

証明. それぞれが定める交叉族が一致すればよい。$C_{\mathcal{E}}$ の固定点 A は、

$$\Gamma \subseteq A, \Gamma \rightarrow_{\mathcal{E}} x \;\Rightarrow\; x \in A$$

で特長付けられる、すなわち、$\mathcal{E}$-closed な集合にほかならない。

一方、$\tau_{\mathcal{E}}$-closed であることは、$\mathcal{E}$-closed であることと一致。以上により $C_{\tau_{\mathcal{E}}} = C_{\mathcal{E}}$.

∎

3.3 生成系を生成する最小のハイパーグラフ

C を X 上の閉包作用素とする。$B \subseteq X$ が C-*seed* とは

- $CB \neq B$.
- $M \subseteq B, M \neq B$ かつ M が C-seed ならば $CM \subseteq B$.

この定義は再帰的だが、有限集合に対しては定義される：

補題 7 *有限部分集合に対する C-seed の概念は well-defined.*

$$C_s A := A \bigcup \bigcup_{S \subseteq A, S \neq A, S: C-seed} CS$$

と定義すると明らかにつぎが成り立つ。

補題 8 *$C_s A = A \iff A$ は C-seed であるか、C-closed.*

命題 9

$$\sigma := \left\{ (S, a) \;\middle|\; S : C-seed, a \in CS \right\},$$

と置くとき、有向ハイパーグラフ τ_0 は C を生成する。

証明. σ が定める閉包作用素を C_σ とする。定義より $C_\sigma E \subseteq CE$.

$C_\sigma E \neq CE$ となる E が存在したとする.

$F := C_\sigma E$ とおくと、

$$CF = CC_\sigma E = CE \neq C_\sigma E = F. \tag{1}$$

また、$S \subseteq F$ ならば、$C_\sigma F = F$ より $CS \subseteq F$. 従って F は C-seed となる。

従って、$CF \subseteq F$. よって $F = CF$ となるが、これは (1) と矛盾。

よって、$C_\sigma = C$ となる。 ∎

注意

$$C_w A := A \bigcup \bigcup_{B \subseteq A, B \neq A} CB$$

と定めるとき、$C_s E \subseteq C_w E \subseteq C$.

しかし、C_w-closed で C-closed でないものは C-seed よりも少ない。

例 10 $X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ とし $\tau = \{ 1 \rightarrow 4, 12 \rightarrow 3 \}$ とする。このとき

$$\mathcal{A}_\tau = \{ \emptyset, 2, 3, 4, 14, 23, 24, 34, 1234 \}.$$

Seed は $\{ 1, 124 \}$. しかし 124 は C_w*-closed* ではない。実際 $12 \subseteq 124$ は $C12 = 1234$ を満たす。