2001 年度後期 形式概念解析入門　　資料 2001.11.14 Ver. 1,
http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/am01.html

3 閉包作用素に関するアルゴリズム

C を $X := \{1, \cdots, n\}$ 上の閉包作用素とする。C の閉集合を数え上げる以下のようなアルゴリズムがある（Ganter-Wille's Book.）

pow (X) に、つぎのような全順序を入れる（辞書式順序と呼ばれる）：まず部分集合 $A \subseteq X$ を n 桁の $0,1$-列 $c(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$ で表わす：

$$a_i = 1 \overset{def}{\Longleftrightarrow} i \in A.$$

そして、辞書式順序で $c(A) < c(B)$ のとき $A < B$ と定義する。たとえば、$n = 3$ ならば

$$000 < 001 < 010 < 011 < 100 < 101 < 110 < 111.$$

部分集合で表すと

$$\emptyset < 3 < 2 < 23 < 1 < 13 < 12 < 123.$$

$1 \leq i \leq n$ に対し $\mu_i A := (A \bigcap \{1, 2, \cdots, i-1\}) \bigcup \{i\}$ と置く。$a_1 = b_1 \cdots a_{i-1} = b_{i-1},\quad a_i < b_i$ のとき $A <_i B$ と書く。

補題 1 *1.* $A <_i B, CB = B$ ならば、$A <_i C(\mu_i A)$.

2. $A <_i C(\mu_i A)$, $A <_j C(\mu_j A)$, $i < j$ ならば $C(\mu_j A) < C(\mu_i A)$.

証明. $A <_i B$ より $\mu_i A \subseteq B$。従って $C(\mu_i A) \subseteq CB = B$.

$$C(\mu_i A) \bigcap \{1, \cdots, i-1\} = B \bigcap \{1, \cdots, i-1\} = A \bigcap \{1, \cdots, i-1\},$$

で $i \notin A, i \in C_(\mu_i A)$ より

$$A <_i \mu_i A.$$

次ぎに、$A <_i C(\mu_i A)$, $A <_j C(\mu_j A)$, $i < j$ とする。このとき $C(\mu_i A) \bigcap \{1, \cdots, i-1\} = C(\mu_j A) \bigcap \{1, \cdots, i-1\}$ でしかも $i \in C(\mu_i A)$ と $i \notin C(\mu_j A)$ より

$$C(\mu_j A) <_i C(\mu_i A).$$

∎

命題 2 $A \subseteq X$ に対し $A <_i C(\mu_i A)$ を満たす i が必ず存在し、その中で最大の i を j とすると、$C(\mu_j A)$ は A の直後の閉集合となる。

証明. B を A の直後の閉集合とする。$A <_i B$ となる i を取ると、上の補題より $A <_i C\mu_i A \leq B$ となる。従って $B = C\mu_i A$.

ほかに、$A <_k C(\mu_k A)$ を満たす $k > i$ があるとするとき、$C(\mu_k A) <_i C(\mu_i A)$ より、$A < C(\mu_k A) < C(\mu_i A) \leq B$ となり、$B = C(\mu_i A)$ が A の直後の元であることに反する。 ∎

以上により、閉集合を求めるアルゴリズムが得られる。

演習問題 $n = 4$ とし、$1 \to 2, 1, 3 \to 4$ から得られる生成系を考える。これの閉集合をすべて求めよ。

$A_0 = \emptyset$ から始める。$\mu_4 A_0 = \{ 4 \}$ は閉集合。従って $A_1 = \{ 4 \}$.

$\mu_4\{ 4 \} = \{ 4 \}$, $\mu_3\{ 4 \} = \{ 3 \}$ は閉集合。従って $A_2 = \{ 3 \}$.

$\mu_4\{ 3 \} = \{ 3, 4 \}$ は閉集合。従って、$A_3 = \{ 34 \}$.

$\mu_4\{ 3, 4 \} = A_4$, $\mu_3\{ 3, 4 \} = \{ 3 \} = A_2$. $\mu_2\{ 34 \} = \{ 2 \}$ は 閉集合。従って $A_4 = \{ 2 \}$.

$\mu_4\{ 2 \} = \{ 2, 4 \}$. は閉集合。従って $A_5 = \{ 2, 4 \}$.

$\mu_4 A_5 = A_5$. $\mu_3 A_5 = \{ 2, 3 \}$ は閉。従って $A_6 = \{ 2, 3 \}$.

$\mu_4 A_6 = \{ 2, 3, 4 \}$ は閉。従って $A_7 = \{ 2, 3, 4 \}$.

$\mu_4 A_7 = A_7, \mu_3 A_7 < A_7, \mu_2 A_7 < A_7$. $\mu_1 A_7 = \{ 1 \}$ で、この閉包は、$\{ 1, 2 \}$. 従って $A_8 = \{ 1, 2 \}$.

$\mu_4 A_8 = \{ 1, 2, 4 \}$ は閉集合。従って $A_9 = \{ 1, 2, 4 \}$.

$\mu_4 A_9 = A_9$. $\mu_3 A_9 = \{ 1, 2, 3 \}$ の閉包は $A_10 = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

4　束論の基礎概念

4.1　次数付き順序集合

$(X, \leq)$ を順序集合とする。

$a < x < b$ のような x が存在しないとき $a << b$ と書き、a は b の直前の元、b は a の直後の元という。

順序を保つ写像 $\nu : X \to \mathbb{Z}$ があり、$a < b$ のとき、

$$\nu(b) = \nu(a) + 1 \Leftrightarrow a << b$$

が成り立つとき、$(X, \leq)$ を次数付きの順序集合といい、ν をその次数関数という。

$$a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

のような元の列を a, b の間の長さ n の鎖と呼ぶ。各 i について $a_i << a_{i+1}$ であるような鎖を極大鎖と呼ぶ。

順序集合 $(X, \leq)$ に最小元があるとき、元 a の「高さ」$ht(a)$ を、a と最小元の間の極大鎖の長さの最小値として定義する。有限の極大鎖が存在しないとき、高さは無限であると定義する。次数付き順序集合の場合、次数関数の一つを ν とすると、$ht(a) = \nu(a) - \nu(\perp)$ となる。

$(X, \leq)$ が Jordan-Dedekind の鎖条件を満たすとは、どの 2 元についても、その間の極大鎖の長さが同じであることを言う。

命題 3 有限順序集合については、*Jordan-Dedekind* の鎖条件を満たすことと、次数付きの順序集合であることとは同値である。

4.2　分配束

束 $(X, \leq)$ が分配束であるとは、

$$(*) \qquad a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$$

を満たすことを言う。

補題 4 *(*)* がすべての a, x, y について成立すれば、

$$(**) \qquad a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$$

が成り立つ。

証明. 通常のように分配法則により展開すると

$$
\begin{aligned}
(a \vee x) \wedge (a \vee y) &= (a \wedge a) \vee (a \wedge y) \vee (x \wedge a) \vee (x \wedge y) \\
&= a \vee (a \wedge y) \vee (x \wedge a) \vee (x \wedge y) \\
&= a \vee (x \wedge y).
\end{aligned}
$$

ここで $a \vee (a \wedge y) = a$ などを使っている。 ∎

例 べき集合では、分配法則が成り立つ。また、命題論理式の論理同値類の poset でも分配法則が成り立つ。

反例 ベクトル空間の部分空間のなす束では、分配法則は成り立たない。

$$V \bigcap (W_1 + W_2) = (V \bigcap W_1) + (V \bigcap W_2)$$

は一般には成り立たない。例えば平面上で、W_1 が x 軸, W_2 が y 軸、V は対角線 $x = y$ のとき、$W_1 + W_2$ は全体だから左辺は V だが、$V \bigcap W_i$ は共にゼロ次元なので右辺はゼロ。

この状況は以下の図で表示できる：

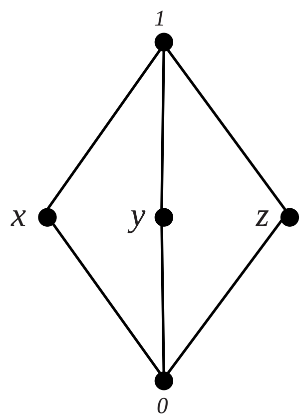

図 1: 分配法則が破れる状況 1

命題 5 L が分配法則を満たすための必要十分な条件は、図 *1,2* が含まれないことである。

4.3 modular lattice

束 L において、 $x \leq y$ のとき $x \bigvee \bullet$ と $y \bigwedge \bullet$ が可換なとき、束は *modular* **束**と言う。

例：線形部分空間の束　条件は $V \subset W$ のとき

$$(V+X)\bigcap W = V + (X \bigcap W)$$

でこれは成立する。

つぎの図が含まれていると、modular ではなくなる：

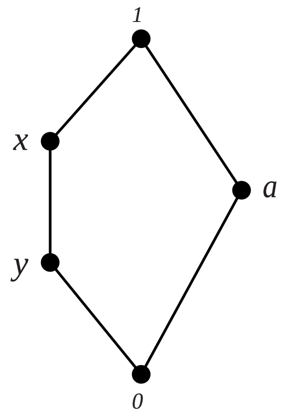

図 2: モジュラー則が破れる状況

このとき $y \bigvee a = \top$ で $x \bigwedge a = \bot$. 従って

$$(a \bigwedge x) \bigvee y = \bot \bigvee y = y,$$
$$(a \bigvee y) \bigwedge x = \top \bigwedge x = x.$$

命題 6 *L* がモジュラー法則を満たすための必要十分な条件は、図 *2* が含まれないことである。

命題 7 *L* が *modular* のとき a, b に対し

$$[a, a\bigvee b] \ni x \mapsto x \bigwedge b \in [a \bigwedge b, b]$$

は全単射で、その逆は $y \mapsto y \bigvee a$ で与えられる。

証明. $a \leq x \leq a \bigvee b$ のとき

$$(x \bigwedge b) \bigvee a = (b \bigwedge x) \bigvee a = (b \bigvee a) \bigwedge x = x.$$

また、$a \bigwedge b \leq y \leq b$ ならば

$$(y \bigvee a) \bigwedge a = (a \bigvee y) \bigwedge b = (a \bigwedge b) \bigvee y = y.$$

∎

命題 8 *modular* 束は *Jordan-Dedekind* の鎖条件を満たす。