2001 年度後期 形式概念解析入門　　資料 2001.11.22Ver. 1.1,
http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/am01.html

5　領域理論

生成系は単調性「 $\Gamma \to a$ ならば、$\Gamma \bigcup b \to z$ 」を満たす。しかし、現実には、新たなもの b が加わることで、生成が阻害される場合もある。

証明論でも同じである。「理論」を推論で閉じた命題の集合と、考えると、すべての命題の集合も理論となるが、そういう理論は意味はないので、通常は、命題の全体集合を理論から除外する。

5.1　広義交叉集合族

「交叉集合族」は、空の集合族の交わりとして全体集合を含んでいた。そこで、この条件を外したものを、広義交叉集合族と呼ぶことにする。

定義　集合 X 上の集合族 $\mathcal{A}$ が、広義交叉集合族であるとは、$\left\{ A_i \;\middle|\; i \in I \right\}(A_i \in \mathcal{A})$ が空でないとき、

$$\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A},$$

を満たすことを言う。

無限集合 X の有限部分集合の全体 $\mathbf{pow}_f(X)$ は、広義交叉集合族の例である。また、無限次元線形空間の中の有限次元部分空間の全体も広義交叉族集合となる。

5.2　完備順序集合

全体集合がないので、空集合族の meet がなく、meet 完備とはならない。従って、join 完備になるとも限らない。meet 完備ならば join 完備となることの証明を思い起こせば以下のことがわかる：

補題 1 空集合以外の部分集合が *meet* を持つ束においては、上界を持つ部分集合は *join* を持つ。

join の存在についてもっと積極的な十分条件を持つ順序集合として、完備順序集合（ＣＰＯ、Complete Partial Order）の概念がある。これは、join 完備を「有向族だけ join がある」という条件に弱めた束であるが、広く役立っている。ただし、順序部分集合 X の部分集合 Y が有向で

あるとは、どの二元 $x, y \in Y$ に対しても、Y の中に上界があること、すなわち、$x, y \leq z$ となる $z \in Y$ が存在することを言う。

有向集合族の例

- 無限集合の中の有限部分集合の全体は有向集合族。
- 無限群の中の有限生成部分群の全体は有向。

完備順序集合の例

1. 命題論理式全体の中で、論理式の集合で推論規則で閉じている集合で全体集合ではないもの（無矛盾な理論）の全体は、meet 完備とはならないが、完備順序集合となる。
   説明. $\mathcal{T}_i$ が無矛盾な理論の有向族とする。このとき $\mathcal{T} = \bigcup_i \mathcal{T}_i$ は無矛盾となる。実際、$\mathcal{T}$ で矛盾が出たとすると、その証明の仮定は有限の論理式 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ からなる。$\varphi_i \in \mathcal{T}_{j_i}$ とする。有向性から、$\mathcal{T}_{j_1}, \cdots, \mathcal{T}_{j_n} \subseteq \mathcal{T}_i$ となる i が存在する。このとき、$\mathcal{T}_i$ で矛盾が出ることになり、仮定に反する。
2. アルファベット Σ の有限語と無限語全体の集合 $\Sigma^* \bigcup \Sigma^{**}$ に $\alpha \leq \beta \overset{def}{\Longleftrightarrow} \beta = \alpha.\gamma$ という順序関係を入れるとき、これは完備順序集合となる。この場合には、有向部分集合は線形部分集合となる。
3. $X \multimap\!\!\rightarrow Y$ を X から Y への部分写像の全体とする。ここで部分写像とは、$X \times Y$ の部分集合 ω で $(x, y), (x, y') \in \omega$ ならば $y = y'$ を満たすものを言う。これは自然な包含関係で順序集合をなす。最大元は存在しないので完備束にはならないが、完備順序集合となる。

5.3 代数的広義交叉族

広義交叉族 $\mathcal{A}$ が**代数的**であるとは、部分集合族 $\{ A_i \} i \in I$ が有向のとき、$\bigcup_i A_i$ が $\mathcal{A}$ に属することを言う。このとき、$\bigcup_i A_i$ は $\bigvee_i B_i$ となるので、完備順序集合となる。交叉族が広義交叉族として代数的なとき、**代数的交叉族**と呼ぶ。

代数的交叉族の例

1. 命題論理式の集合 X の中で、無矛盾な理論の全体は前節で見たように完備順序集合なので、代数的広義交叉族となる。
2. ベクトル空間 V の部分空間 $Sub_f(V)$ の全体は、V 上の代数的交叉族となる。
   説明. $\left\{ V_i \;\middle|\; i \in I \right\}$ が部分空間の族で、どの $i, j \in I$ についても $V_i, V_j \subseteq V_k$ となる $k \in I$ が存在するとする。このとき、$W := \bigvee_{i \in I} V_i$ は線形部分空間となる。**証明：**W がスカラー倍について閉じていることは明らかである。和で閉じていることはつぎのようにしてわか

る。$x, y \in W$ のとき、$x \in V_i$, $y \in V_j$ となる $i, j \in I$ が存在するが、この i, j に対して、$V_i, V_j \subseteq V_k$ となる $k \in K$ を取れば、$x + y \in V_k$ となる。従って、$x + y \in W$. ∎

3. 群 G の部分群のなす束 $Sub(G)$ は、代数的交叉族となる。
   説明. $\left\{ V_i \;\middle|\; i \in I \right\}$ が部分群の族で、どの $i, j \in I$ についても $V_i, V_j \subseteq V_k$ となる $k \in I$ が存在するとする。このとき、$W := \bigvee_{i \in I} V_i$ は部分群となる。**証明：**W が単位元を含むことと、逆元を取る操作で閉じていることは明らか。積で閉じていることはつぎのようにしてわかる。$x, y \in W$ のとき、$x \in V_i$, $y \in V_j$ となる $i, j \in I$ が存在するが、この i, j に対して、$V_i, V_j \subseteq V_k$ となる $k \in K$ を取れば、$xy \in V_k$ となる。従って、$xy \in W$. ∎

上の証明を比較すれば、多くの代数的構造について、部分代数全体のなす交叉族が代数的であることがわかる。これが「代数的」という用語の一つの由来である。

5.4 代数的閉包作用素

閉包作用素 $C : \mathbf{pow}\,(X) \to \mathbf{pow}\,(X)$ はつぎを満たすとき代数的であるという：

$$CE = \bigcup_{A \Subset E} CA.$$

ただし、$A \Subset E$ は、A が E の有限部分集合であることを表す。

定理 2 $\mathcal{A}$ を交叉族、C を対応する閉包作用素とする。このとき、

$$\mathcal{A}\text{ が代数的} \Leftrightarrow C\text{ が代数的}.$$

証明. $\mathcal{A}$ が代数的とする。集合族 $\left\{ CA \;\middle|\; A \Subset E \right\}$ は $\mathcal{A}$ の部分集合族で有向である。従って、$C'E := \bigcup_{A \Subset E} CA \in \mathcal{A}$. 一方

$$E = \bigcup_{A \Subset E} A \subseteq \bigcup_{A \Subset E} CA = C'E.$$

従って $CE \subseteq C'E$. 一方、定義より $C'E \subset CE$. よって $CE = C'E$.

逆に C が代数的な閉包作用素とする。$\mathcal{A}$ を C の閉集合のなす交叉族とし、$\left\{ E_i \;\middle|\; i \in I \right\}$ が有向族のとき、$\bigcup_i E_i$ が閉集合であることを示めせばよい。C が代数的なので、

$$C \bigcup_i E_i = \bigcup_{A \Subset \bigcup_i E_i} CA.$$

$A \Subset \bigcup_i E_i$ が有限集合なので、$\{ E_i \}$ が有向族であることより、$A \Subset E_i$ となる $i \in I$ が存在する。従って、$CA \subseteq CE_i = E_i \subseteq C_i E_i$. よって、

$$C \bigcup_i E_i = \bigcup_{A \Subset \bigcup_i E_i} CA \subseteq \bigcup_i E_i.$$

以上より、$\bigcup_i E_i$ が閉集合であることがわかる。 ∎

5.5 有限非単調生成系

有限非単調生成系とは、部分集合族集合族 $\mathcal{E} \subseteq \mathbf{pow}_f(X)$ と有向ハイパーグラフ $\tau \subseteq \mathcal{E} \times X$ の組みで、以下を満たすもの。

1. $E \in \mathcal{E}, F \subseteq E$ ならば $F \in \mathcal{E}$.
2. $\{ x \} \rightarrow_\tau x$.
3. $\Gamma \rightarrow_\tau a$ ならば $\Gamma \bigcup \{ a \} \in \mathcal{E}$.
4. $\Gamma \rightarrow_\tau a, a \bigcup \Delta \rightarrow b$ で、$\Gamma \bigcup \Delta \in \mathcal{E}$ ならば $\Gamma \bigcup \Delta \rightarrow_\tau b$.

有限非単調生成系 τ は閉包作用素 C_τ を以下のように定める：$E \subseteq \mathbf{pow}\,(X)$ が τ 整合的であるとは $E \bigcap \mathbf{pow}_f(X) \subseteq \mathcal{E}$ を満たすことを言う。τ-整合的な集合 E に対し

$$C_\tau E := \left\{ a \;\middle|\; E \supset \Gamma \rightarrow_\tau a \text{ となる} \Gamma \in \mathcal{E} \text{ がある } \right\}$$

と定義し、そうでない集合 E については

$$C_\tau E := X$$

と定義する。

命題 3 C_τ は代数的閉包作用素となる。

証明. 単調性と増大性は明らか。$C_\tau^2 = C_\tau$ は、カットルールからつぎのように示される：$\Gamma \rightarrow_\tau a$, $\Gamma \subset C_\tau E$ とする。$\gamma \in \Gamma$ に対し、$B_\gamma \rightarrow_\tau \gamma$ となる $B_\gamma \subseteq E$ がある。

もしも $E := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \in \mathcal{E}$ ならば、カットルールより $\bigcup_\gamma B_\gamma \rightarrow_\tau a$ となる。従って、$a \in CE$.

もしも $E := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \notin \mathcal{E}$ ならば、CE は整合的でなく、$CE = X$ となる。従って、$CCE = CE = X$.

代数的であること： $E \in \mathcal{E}$ のとき、$CE = \bigcup_{A \subset\ E} CA$. E が整合的なとき定義より $CE = \bigcup_{A \subset\ E} CA$. E が整合的でないときは、$CE = X$. 一方、明らかに、

$$A \subseteq \bigcup_{A \subset\ E} \subseteq \bigcup_{A \subset\ E} CA = X.$$

∎

τ-整合的な C_τ-閉集合全体を $\mathcal{A}_\tau$ と書く。

命題 4 $\mathcal{A}_\tau$ は代数的広義交叉族となる。

証明. C_τ が代数的であることは定義より明らか。 ∎

逆に $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{pow}\,(X)$ が代数的な広義交叉族のとき、

$$\mathcal{E} = \left\{ E \;\middle|\; E \text{ は有限集合で、ある } \mathcal{A} \text{ の元に含まれる} \right\}$$

と置き、$E \in \mathcal{E}$ に対し

$$E {\rightarrow_\tau} a \overset{def}{\iff} \forall A \in \mathcal{A}[E \subseteq A \Rightarrow a \in A]$$

と定義するとき、$(\mathcal{E}, \tau)$ は、有限的非単調生成系となる。

問題 5 上を証明せよ。

5.6 代数的束

代数的交叉族のなす完備順序集合は、以下のように束論の言葉だけで特長つけられる。

L を完備順序集合とする。$x \in L$ が**有限**であるとは、任意の有向族 $\left\{ \ell_i \;\middle|\; i \in I \right\}$ に対し、$x \leq \bigvee_i \ell_i$ ならば、$x \leq \ell_i$ となる i が存在することを言う。

$F(L)$ を有限な元の全体とする。

$x \in L$ に対し

$$x = \bigvee_{a \leq x, a \in F(L)} a$$

となるとき、L は**代数的**な完備順序束であるという。

5.6.1 例

整合的な理論の束 $Prop(V)$ を命題変数 V から構成される命題論理式の集合とし、$\mathcal{A}$ を整合的な理論の束とする。このとき、理論 T が有限的であるとは、T が有限の公理を持つことを言う。コンパクト性定理より、任意の理論は、有限の公理を持つ理論の合併となる。従って、この束は代数的な束である。

部分関数の束 $\omega : X \multimap Y$ が有限とは、$|\omega|$ が有限であることと同値である。どの写像 $f : X \rightarrow Y$ も

$$f = \bigvee_{E \Subset X} f|_E$$

を満たすので、$X \multimap Y$ は代数的な完備順序集合となる。

命題 6 代数的な広義交叉族は代数的完備順序束となる。有限集合の閉包となる閉集合が有限な元である。