2001 年度後期 形式概念解析入門　　資料 2001.11.29,12.12Ver. 1.1,
http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/am01.html

# 6 形式概念解析の基礎

## 6.1 定義

$C = (X, A, \models)$ が形式的文脈であるとは、$\models$ が 集合 $X, A$ の間の関係 $\models \subseteq X \times A$ であることを言う。

$X$ の元を対象（object）, $A$ の元を属性（attribute）といい、$\models$ を適合関係と呼ぶ。モデル理論の考え方を暗に活用するために、$(x, a) \in \models$ を $x \models a$ と書き、$x$ は属性 $a$ を持つと言う。

**極作用素**　$x \in X$ に対し

$$x' := \left\{ a \in A \;\middle|\; x \models a \right\}$$

を対象 $x$ の内包 (intent) と言い、$a \in A$ に対し

$$a' := \left\{ x \in X \;\middle|\; x \models a \right\}$$

を属性 $a$ の外延 (extent) と言う。

明らかに

$$x \models a \Leftrightarrow x \in a' \Leftrightarrow a \in x'.$$

部分集合 $Y \subseteq X$ に対し

$$Y' := \bigcap_{y \in Y} y'$$

部分集合 $B \subseteq A$ に対し

$$B' := \bigcap_{b \in B} b'$$

と置くと、同様に

$$Y \times B \subseteq \models \ \Leftrightarrow B \subseteq Y' \Leftrightarrow Y \subseteq B'.$$

初回で示したように、$Y \mapsto Y'$ は、順序を逆転させる写像 $\mathbf{pow}\,(X) \to \mathbf{pow}\,(A)$ を定め、$Y' = Y'''$ を満たす。これより、$Y \mapsto Y''$ は $X$ 上の閉包作用素となる。$\mathcal{X}$ をその閉集合族とする。

同様に $A \mapsto A''$ は $A$ 上の閉包作用素となる。$\mathcal{A}$ をその閉集合族とする。

**形式概念** $(Y, B) \in \mathbf{pow}\ (X) \times \mathbf{pow}\ (A)$ が

$$Y' = B \text{ かつ } B' = Y$$

を満たすとき、**文脈 $C$ の形式的概念**であるという。$Y$ をその**外延**、$B$ をその**内包**と呼ぶ。

形式的概念の全体 $\mathcal{B}(C)$ につぎの順序を入れる：

$$(Y_1, B_1) \le (Y_2, B_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} Y_1 \subseteq Y_2.$$

**命題 1** $(Y, B) \mapsto Y$ は順序同型 $\beta : \mathcal{B}(C) \mapsto \mathcal{X}$ を定め、$(Y, B) \mapsto B$ は順序同型 $\alpha : \mathcal{B}(C) \mapsto \mathcal{A}^{op}$ を定める。従って、$\mathcal{B}(C)$ は完備束である。

**証明.** $\beta$ が定義されていることは、$(Y, B)$ が形式概念ならば、$Y'' = B' = Y$ よりわかる。単射であることは、$B = Y'$ よりわかる。また、全射であることは、$Y \in \mathcal{X}$ に対して $(Y, Y')$ が形式概念であり、$\beta(Y, Y') = Y$ よりわかる。順序を保ことは定義より明らか。

同様に $\alpha$ が全単射であることがわかる。反同型であることは、$Y_1 \subseteq Y_2 \Leftrightarrow Y_1' \supseteq Y_2'$ より明らか。
∎

**定理 2** $(Y_i, B_i) \in \mathcal{B}$ に対し、

$$\bigvee_i (Y_i, B_i) = ((\bigcup_i Y_i)'', \bigcap_i B_i),$$

$$\bigwedge_i (Y_i, B_i) = (\bigcap_i Y_i, (\bigcup_i B_i)'').$$

**証明.** $\beta$ は順序同型なので、

$$\beta \bigvee_i (Y_i, B_i) = \bigvee_i \beta(Y_i, B_i) = \bigvee_i Y_i = (\bigcup_i Y_i)''.$$

同様に $\alpha$ は順序反同型なので

$$\alpha \bigvee_i (Y_i, B_i) = \bigwedge_i \alpha(Y_i, B_i) = \bigwedge_i B_i = (\bigcap_i B_i)''.$$

∎

## 6.2 例

$L$ は形式文脈 $(L, L, \le)$ を定める。

**命題 3** $\mathcal{B}(L, L, \le)$ の形式概念は $(\ell\downarrow, \ell\uparrow)$ $(\ell \in L\ )$ と表現される。従って、形式概念束は $L$ と同型となる。

**証明.** $L_1 = L, L_2 = L$ と書くことにする。$Y \subseteq L_1$ に対し

$$Y' = \left\{ \ell \;\middle|\; y \leq \ell \quad \forall y \in Y \right\} - = \left\{ \ell \;\middle|\; \bigvee Y \leq \ell \right\} = (\bigvee Y) \uparrow .$$

同様に、 $B \subseteq L_2$ に対し、$B' = (\bigwedge B) \downarrow$.

$(Y, B)$ が形式概念であるとき、$(b \downarrow, y \uparrow)$ $(y = \bigvee Y,\, b = \bigwedge B)$ と表示されるが、$\bigwedge(y \uparrow) = y$. 実際、$a \leq x \forall x \in y \uparrow$ は $a \leq y$ と同値なので、$y = \bigwedge(y \uparrow)$. よって、$b = y$. ∎

## 6.3 概念束と文脈の関係

$\mathcal{B}(C)$ と $C$ の関係を特長付ける。

$x \in X,\, a \in A$ に対し

$$\gamma(x) := (x'', x') \in \mathcal{B}, \quad \mu(a) := (a', a'') \in \mathcal{B}$$

とおくと、つぎの写像が定義される。

$$\gamma : X \rightarrow \mathcal{B}, \quad \mu : A \rightarrow \mathcal{B}.$$

**命題 4** *1.* $\gamma(X)$ は $\bigvee$*-dense,* $\mu(A)$ は $\bigwedge$*-dense* である。

*2.* $(x, a) \in X \times A$ に対し、$x \models a$ と $\gamma(x) \leq \mu(a)$ は同値。

ここで、完備束 $(L, \leq)$ の部分集合 $B$ が $\bigvee$-dense であるとは、どの元 $\ell \in L$ も

$$\ell = \bigvee_{b \leq \ell, x \in B} b$$

を満たすことを言う。

**証明.** 形式概念 $(Y, B)$ に対し

$$(Y, B) = \bigvee_{y \in Y} (y'', y').$$

実際、右辺の第１成分は、命題**??**と $y'' \subseteq Y'' = Y$ より

$$((\bigcup_{y \in Y} y'')'' = Y'' = Y.$$

同様に

$$(Y, B) = \bigwedge_{b \in B} (b', b'').$$

実際、右辺の第２成分は命題**??**と $b'' \subseteq B$ より

$$((\bigcup_{b \in \in B} b'') = B'' = B.$$

$x \in X, a \in A$ に対し、

$$\gamma(x) = (x'', x') \leq \mu(a) = (a', a'')$$

は、$x'' \subseteq a'$ と同値である。一方、

$$x \models a \Leftrightarrow x \in a' \Leftrightarrow x'' \subset a'.$$

従って

$$x \models a \Leftrightarrow \gamma(x) \leq \mu(a).$$

∎

**定理 5** $L$ を完備束、$\gamma' : X \to L, \mu' : A \to L$ は写像で、以下を満たすとする：

1. *$\gamma'(X)$ は $L$ で $\bigvee$-dense, $\mu'(A)$ は $L$ で $\bigwedge$-dense.*
2. *$x \models a \Leftrightarrow \gamma'(x) \leq \mu'(a)$.*

このとき、

$$\varphi \circ \gamma' = \gamma, \quad \varphi \circ \mu' = \mu.$$

を満たす順序同型 $\varphi : \mathcal{B}(C) \to L$ がただ一つ存在する：

**証明.**

$$\varphi : \mathcal{B}(C) \to L$$

を

$$\varphi(Y, B) := \bigvee_{y \in Y} \gamma'(y)$$

と定義する。これが順序を保ことは明らか。

ここで、つぎが成り立つ：

$$\bigvee_{y \in Y} \gamma'(y) = \bigwedge_{b \in B} \mu'(b). \tag{$*$}$$

$v := \bigwedge_{b \in B} \mu'(b)$ とおくと、$\gamma'(X)$ が $\bigvee$-dense であることから、

$$v = \bigvee_{\gamma'(x) \leq v} \gamma'(x).$$

ところが $\gamma'(x) \leq v$ は、$\gamma'(x) \leq \bigvee_{b \in B} \mu'(b)$, すなわち, すべての $b \in B$ について $\gamma'(x) \leq b$(すなわち $x \models b$)、すなわち、$x \in B'$ と同値。よって、

$$\bigwedge_{b \in B} \mu'(b) = \bigvee_{y \in Y} \gamma'(y).$$

さて、写像

$$\phi : L \to \mathcal{B}(C)$$

を

$$\phi(\ell) := (\left\{ x \;\middle|\; \gamma'(x) \leq v \right\}, \left\{ a \;\middle|\; \mu'(a) \geq v \right\})$$

と定めるとき、これが $\varphi$ の逆写像となることを示せばよい。

まず、$\phi$ が well-defined であることはつぎのようにわかる。$v \in L$ とする。

$$\begin{aligned} a \in \left\{ x \;\middle|\; \gamma(x) \leq v \right\}' \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x[\gamma'(x) \leq v \Rightarrow x \models a] \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall x[\gamma'(x) \leq v \Rightarrow \gamma'(x) \leq \mu'(a)] \\ &\Longleftrightarrow \quad \bigvee_{\gamma'(x) \leq v} \gamma'(x) \leq \mu'(a)] \\ &\Longleftrightarrow \quad v \leq \mu'(a). \end{aligned}$$

従って

$$(\left\{ x \;\middle|\; \gamma'(x) \leq v \right\})' = \left\{ a \;\middle|\; \mu'(a) \geq v \right\}.$$

同様に

$$(\left\{ a \;\middle|\; \mu'(a) \geq v \right\})' = \left\{ x \;\middle|\; \gamma'(x) \leq v \right\}.$$

よって、$\phi : L \to \mathcal{B}(C)$ が定義される。

$\phi(\varphi(Y, B)) = (Y_1, B_1)$ とおくと、

$$Y_1 = \left\{ x \;\middle|\; \gamma'(x) \leq \bigvee_{y \in Y} \gamma'(y) \right\} \supseteq Y.$$

一方

$$B_1 = \left\{ a \;\middle|\; \mu'(a) \geq \bigvee_{y \in Y} \gamma'(y) \right\} = \left\{ a \;\middle|\; \mu'(a) \geq \bigwedge_{b \in B} \mu'(b) \right\} \supseteq B.$$

よって、$Y \subseteq Y_1$, $B \subseteq B_1$ より、$(Y, B) \leq (Y_1, B_1)$ かつ $(Y, B) \geq (Y_1, B_1)$. 故に、$(Y, B) = (Y_1, B_1)$.

以上より、$\phi \circ \varphi = \mathrm{id}$ が示された。

つぎに $v \in L$ に対し、

$$\phi(\varphi(v)) = \bigvee_{\gamma(y) \leq v} \gamma(y) = v.$$

ゆえに $\phi \circ \varphi = \mathrm{id}$. ∎

## 6.4 $X, A, \gamma, \mu$ による諸情報の表示

形式文脈 $C = (X, A, \models)$ に関する種々の情報は $\gamma, \mu$ と概念束 $L$ の束構造から引きだすことができる。

まず、$\gamma$,$\mu$ はべき集合に拡張できる：

$$\gamma(Y) = \bigvee_{y \in Y} \gamma(y),$$

$$\mu(B) = \bigwedge_{b \in B} \mu(b).$$

**命題 6** *1.* $\gamma(\gamma^{-1}(\downarrow \ell)) = \ell, \quad \mu(\mu^{-1}(\uparrow \ell)) = \ell.$

*2.* $Y \subseteq X$,$B \subseteq A$ に対し

$$Y' = \mu^{-1}(\uparrow \gamma(Y)), \quad B' = \gamma^{-1}(\downarrow \mu(B)).$$

*3.* $Y'' = \gamma^{-1} \downarrow \gamma(Y)$, $B'' = \mu^{-1}(\uparrow \mu(B))$.

**証明.**

1. $\gamma(X)$ は $\bigvee$-dense なので、$\gamma(\gamma^{-1} \downarrow \ell) = \bigvee_{\gamma(y) \leq \ell} \gamma(y) = \ell$.
   同様に、$\mu(\mu^{-1}(\uparrow \ell)) = \ell$.
2. $Y' = \mu^{-1}(\uparrow \gamma(Y))$ は次からわかる。

$$\begin{aligned} a \in Y' &\Leftrightarrow \quad y \models a \quad \forall y \in Y \\ &\Leftrightarrow \quad \gamma(y) \leq \mu(a) \forall y \in Y \\ &\Leftrightarrow \quad \gamma(Y) \leq \mu(a) \Leftrightarrow a \in \mu^{-1}(\uparrow \gamma(Y)). \end{aligned}$$

   同様に、$B' = \gamma^{-1}(\downarrow \mu(B))$.
3. 閉包作用素については以下より：

$$Y'' = \gamma^{-1}(\downarrow \mu(Y')) = \gamma^{-1} \downarrow \mu(\mu^{-1}(\uparrow \gamma(Y))) = \gamma^{-1} \downarrow \gamma(Y).$$

   同様に

$$B'' = \mu^{-1}(\uparrow \mu(B)).$$

∎