2001 年度後期 形式概念解析入門　　資料 2001.12.10Ver. 1,
http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/am01.html

6 形式概念解析の基礎（続き）

6.1 極小文脈

6.1.1 外延性およびライプニッツ原理

$(X, A, \models)$ が clarified であるとは、極写像 $x \mapsto x'$, $a \mapsto a'$ が共に単射であることを言う。

> $a \mapsto a'$ が単射であることは、外延が一致する概念は同じという条件であり、集合論でいう外延性公理に相当する。
> $x \mapsto x'$ が単射であることは、性質が一致する対象は同じ、というライプニッツの公理である。[1]

命題 1 形式文脈は、概念束を変えることなく、*clarified* なものに変形できる。

証明. $C = (X, A, \models)$ を概念束とする。

$a \sim b \overset{def}{\iff} a' = b'$ により A に同値関係を入れ, $x \sim y \overset{def}{\iff} x' = y'$ により X に同値関係を入れると、

$$[x] \models [a] \overset{def}{\iff} x \models a$$

が明らかに well-defined。これにより、形式文脈 $C_1 := (X/\sim, A/\sim, \models)$ が定義される。

(B, Y) を C の形式概念とするとき、$B = Y'$ より B は同値類の和集合となる。実際、$b \in Y'$ は $b' \subseteq Y$ と同値なので、Y' は同値類の和集合となる。同様に $Y = B'$ により、Y も同様である。$Y_1 := Y/\sim$, $B_1 := B/\sim$ とおくと、$Y_1' = B_1$. 実際、$[b] \in Y_1'$ とすると、$[b] \models [y]$ すなわち、$b \models y$ がすべての $y \in Y$ で成り立つので $b \in Y' = B$. 従って $[b] \in B_1$. これより、$B_1 \subseteq Y_1'$. 逆の包含関係は明らか。

同様に $Y_1 = B_1'$ が示される。

以上により、$\mathcal{G}(C) \to \mathcal{G}(C_1)$ が定義される。これが単射であることは、形式概念 (Y, B) について、$Y = \bigcup_{y \in Y} [y]$ よりわかる。

[1] http://plato.stanford.edu/entries/identity-indiscernible/より：The Identity of Indiscernibles is a principle of analytic ontology first explicitly formulated by Wilhelm Gottfried Leibniz in his Discourse on Metaphysics, Section 9 (Loemker 1969: 308). It states that no two distinct substances exactly resemble each other. This is often referred to as ‘ Leibniz ’s Law ’ and is typically understood to mean that no two objects have exactly the same properties. The Identity of Indiscernibles is of interest because it raises questions about the factors which individuate qualitatively identical objects. Recent work on the interpretation of quantum mechanics suggests that the principle fails in the quantum domain.

全射であること：(Y_1, B_1) を形式概念とする。$Y = \bigcup_{Z \in Y_1} Z$, $B = \bigcup_{D \in B_1} D$ とおく。このとき、$Y' = B, B' = Y$ は明らか。 ∎

6.1.2 $\bigvee$-既約な元

完備束の元 x が **$\bigvee$-可約**であるとは、$\bigvee_{y<x} y = x$ となることを言う。x が、自分よりも真に小さな元の join になる、ということであるが、「部分の寄せ集めに過ぎない」ことを象徴的に表現すると言える。

$\bigvee$-可約でない元を **$\bigvee$-既約**という。x が $\bigvee$-既約ならば、自分よりも真に小さな元の join にはならないが、これは「部分では近似できない」ことの象徴とも考えられる。

同様に a が **$\bigwedge$-可約**,**$\bigwedge$-既約**という概念が定義される。a が $\bigwedge$-既約ならば、$\bigwedge_{b>a} b > a$ となるが、これは、a が、自分よりも一般的な性質では規定し尽くせない内容を持っていることを象徴的に表現すると言えるだろう。

命題 2 C を *clarified* な形式文脈 $(X, A, \models)$ とする。

1. $\gamma(x)$ が $\bigvee$-可約であることと
$$\gamma(x) = \bigvee_{\gamma(y)<\gamma(x)} \gamma(y)$$
とは同値。

2. $\gamma(x)$ が $\bigvee$-可約であるための必要かつ十分な条件は $(x'' \setminus \{ x \})' = x''$.

3. $\gamma(x)$ は $\bigvee$-可約とする。このとき、$y \in x'' \setminus \{ x \}$ がすべての $y \models a$ について成立すれば、$x \models a$ が成り立つ。

4. $\gamma(x)$ が $\bigvee$-可約ならば、x を除いた文脈 $C_0 = (X \setminus \{ x \}, A, \models)$ は同じ概念束を持つ。

証明.

1. $\gamma(x)$ が $\bigvee$-可約とすると
$$\gamma(x) = \bigvee_{\ell<\gamma(x)} \ell.$$
$\gamma(X)$ は概念束内で $\bigvee$-dense なので、各 ℓ は
$$\ell = \bigvee_{\gamma(z)\leq\ell} \gamma(z)$$
と表示される。従って、
$$\gamma(x) = \bigvee_{\gamma(z)<\gamma(x)} \gamma(z).$$
逆に、これが成立すれば、$\gamma(x)$ が $\bigvee$-可約なことは明らか。

2. $\gamma(x)$ が $\bigvee$-可約であるとすると、

$$\gamma(x) = \bigvee_{\gamma(y)<\gamma(x)} \gamma(y) = \gamma(\left\{ y \;\middle|\; \gamma(y) < \gamma(x) \right\}).$$

ここで、$y \in x'' \Leftrightarrow \gamma(y) < \gamma(x)$ であったから、

$$\left\{ y \;\middle|\; \gamma(y) < \gamma(x) \right\} = x'' \setminus \left\{ z \;\middle|\; z'' = x'' \right\}.$$

仮定より C は clarified なので、$z'' = x''$ ならば $z = x$. 故に

$$x'' \setminus \left\{ z \;\middle|\; z'' = x'' \right\} = x'' \setminus \{ x \}.$$

従って、$\gamma(x) \leq \gamma(x'' \setminus \{ x \})$ となり $x \in (x'' \setminus \{ x \})''$ を得る。従って、$x'' = (x'' \setminus \{ x \})''$.

逆に、$x \in (x'' \setminus \{ x \})''$ とするとき、

$$\gamma(x) \leq \gamma(x'' \setminus \{ x \}) = \bigvee_{y \in x'', y \neq x} \gamma(y) = \bigvee_{\gamma(y)<\gamma(x)} \gamma(y) \leq \gamma(x)$$

より、$\gamma(x)$ が $\bigvee$-可約となる。

3. $y \in x'' \setminus \{ x \}$ について $y \models a$ すなわち、$\gamma(y) \leq \mu(a)$ のとき (C が clarified なので) $\gamma(x) = \bigvee_{\gamma(y)<\gamma(x)} \gamma(y) < \mu(a)$. よって、$x \models a$.

4. (Y, B) を C の形式概念とすると、$(Y \setminus \{ x \}, B)$ は C_0 の形式概念となる。まず、C_0 において　$Y \setminus \{ x \} = B'$ となることは明らか。

   また、$(Y \setminus \{ x \})' = B$ となる。実際、$y \models a$ がすべての $y \in Y \setminus \{ x \}$ について成立するとする。このとき、

$$\gamma(y) \leq \mu(a) \tag{$*$}$$

   がすべての $y \in Y, y \neq x$ について成立する。$x'' \subseteq Y$ より、(*) はすべての $x'' \setminus \{ x \}$ について成立。従って、$x \models a$. よって $a \in Y' = B$ となる。すなわち、$(Y \setminus \{ x \})' = Y' = B$. 以上により $(Y \setminus \{ x \}), B)$ が C_0 の形式概念であることがわかった。この対応を α と書く。

   逆に (Z, B) を C_0 の形式概念とする。$\widetilde{Z}$ を B の C での極集合とする。このとき、(Z_1, B) は C の形式概念である。実際、$x \notin Z_1$ ならば $Z_1 = Z$ であり、$Z_1' = Z' = B$. また、$z \in Z_1$ であっても、上で示したことにより $Z_1' = (Z_1 \setminus \{ x \})' = B$. 従って、$(Z_1, B)$ は形式概念。この対応を β と書く。

   α と β が互いに逆写像であることは明らか。

∎

系 3 $X_0 := \left\{ x \;\middle|\; \gamma(x) \text{ は} \bigvee -\text{可約} \right\}$, $A_0 = \left\{ a \;\middle|\; \mu(a) \text{ は} \bigwedge -\text{可約} \right\}$ と置くとき、$C_0 := (X_0, A_0, \models_0$) の概念束と C の概念束とは同型で、対応は、$(Y, B) \mapsto (Y \bigcap X_0, B \bigcap A_0)$ で与えられる。

6.1.3 arrow relation

この節では C は clarified であるとする。

arrow 関係の定義

$$x \swarrow a \overset{def}{\iff} x'' \bigcap a' = x'' \setminus \{ x \}.$$

別の言い方をすれば、

- $x \not\models a$ かつ
- $\gamma(y) < \gamma(x)$ ならば、$y \models a$.

同様に

$$x \nearrow a \overset{def}{\iff} a'' \bigcap x' = a'' \setminus \{ a \}$$

と定義する。

命題 4 $\gamma(x)$ が $\bigvee$-既約であることと、$x \swarrow a$ となる $a \in A$ が存在することとは同値である。

$\mu(a)$ が $\bigwedge$-既約であることと、$x \nearrow a$ となる $x \in X$ が存在することとは同値である。

証明. $x \swarrow a$ となる $a \in A$ があるとする。このとき、$x'' \setminus \{ x \}$ は閉集合となるので、$\gamma(x)$ は $\bigvee$-既約となる。

逆に $\gamma(x)$ が $\bigvee$-既約であるとする。$x'' \setminus \{ x \}$ の元と関係のある a がすべて x と関係があるとすれば、$x'' \setminus \{ x \}$ の閉包に x が含まれることになり、$\gamma(x)$ は $\bigvee$-可約となってしまう。従って、ある a は、$a' \supseteq x'' \setminus \{ x \}$ かつ $x \notin a'$ を満たす。すなわち、$a' \bigcap x'' = x'' \setminus \{ x \}$. これは定義より、$x \swarrow a$ を意味する。

$\bigwedge$-既約性についての主張も同様に証明される。 ∎