きょうの予定

- 言語ゲームによる数の多様性
- クリプキの懐疑論の例

目 次

補足 [1, p22] で「ウィトゲンシュタインは単に『いかにして我々は「$68 + 57$ 」という問いに対し「125」と反応すべし、という事を知るか。』と問うであろう。しかし、ある人々はこの問題を『いかにして私は　$68 + 57$ は 125 である、という事を知るか』という、算術に関する懐疑的問題として聞いてしまう、という事に私は気付いた」と述べている。

10　クリプキの懐疑の諸相

クリプキの懐疑論者を論破できないがその際の懐疑論者の議論は我々には出鱈目に近いものと聞こえる。しかし、冷静に判断するとき、我々が正しいと熟知している（と思っている）ことを初心者から問われて説明するとき、すぐに、最後は「正しいから正しい」というところに到達し、それ以上理由を遡ることができなくなる。

ウィトゲンシュタインの洞察は、数はまず日常の社会生活で果たしている独自の役割が先にあり、それは説明すべきことではなく、その役割から数学的数というものが副次的に出ている、と考える。

10.1 茶色本より

茶色本はウィトゲンシュタインが 1934-1935 年度に２人の学生に口述したものである。種々の具体的な「言語ゲーム」が提示されている。言語ゲームという概念装置の使い方を見せている。

10.1.1 言語ゲームの例

(1) 大工 A と、手伝い B の間の交信。言語は「角石」「煉瓦」「板石」「柱」。A がどれかを叫ぶと、B はその形の石を運ぶ。明示的教習による訓練で言葉を習得（事例・報酬・罰により）する。
(2) (1) の拡張：B は１〜１０の数の系列を暗記している。「石版５つ！」という命令をうけて石版置き場に行き、１から５までの語を言いながら、一語毎に石版をとり大工のところまで運ぶ。

- 数字の暗記という言語の新たな道具の導入。
- 数字の明示的な説明と、「石版」などの言葉の明示的説明の**違いが誰の目にも明らかで明瞭になるのは、ただ或る完全な事例（つまり、細部まで完全に規定された言語の事例）を考察する場合だけである。**

(3) 交信の新たな道具として、固有名詞を導入。特定の石材を指して、その名前を発音して、それを名付ける。固有名詞の明示的教習は、(1,2) の場合とは異なる。しかし、この違いは、心の働きとかにはなく、その明示（指さしや語の発音）が訓練全体の中で果たす役割や、実際のコミュニケーションでそれがどう使われるかにある。
(4) 「この石版！」と命じられて、BはAが指さしている石版をもってくる。「石版、そこへ！」と命じられて石版を示された場所に運ぶ。「そこ」という語は明示的に教えられるのかイエスでありノーである。この場合の指さしのしぐさは、コミュニケーションの一部である。
(5) 問答。Aが「石版は何枚ある」と聞き、Bが数えてその数を答える。

例えば (1-5) のようなコミュニケーションシステムを「言語ゲーム」と呼ぼう。... ここでこれまで述べてきた言語ゲームを我々は或る言語の未完の一部としてではなく、それ自体で完結した言語、完結した人間の交信システムだとみなしている。この観点を忘れないようにするためには、かかる簡単な言語が原始的社会状態にある部族の全交信システムであると想定するのがよい。

子供でも大人でもいいが、この言語ゲームの他になお特殊技術言語というべきもの、例えばグラフや図表、図形幾何学、化学記号等を習得するとしても、それは別の言語ゲームをいくつか習得することである。（我々が成人の言語に対して持っている像は、その母国語である星雲状の言語塊の周囲に多少なりとも明確にしきられた言語ゲームとしていくつかの技術言語が散在している、というものである。）

(6) 名前を尋ねることが加わる。新しい形の石材が持ち込まれたとする。Ｂがその一つを指して「これは何」と尋ねる。Ａは「これは...」と答える。指さしの身ぶりを伴ったこの「これは...」という言葉を直示定義と呼ぶ。
(7) Ｂはある図表を持っている。それには文字記号が事物の絵に対置されている。Ａが一つの文字記号を書くと、Ｂはその記号を図表の上で探し、文字記号からそれに向いあっている絵に目を移すなり指でたどるなりする、そしてその絵が表している物をもってくる。
(8) (1) でＡが「石版、柱、煉瓦！」という命令を発し、Ｂが石版を一つ、柱を一つ、煉瓦を一つもってくることでその命令が果たされるとする。
(9) 前のゲームで、語の順序がＢが石材を運んでくる順序を示しているのであれば、Ａは３語からなる一つの命題を発したのだと我々は言うだろう。品詞が区別される。
(10) 順序数を使って、例えば「２番目、柱。１番目、板石。３番目煉瓦！」というように指示できる。

以上のように、命題の中の語の機能の数知れぬ変化が示される。

(11) (2) の変形。「石版１つ！」「角石一つ！」という変わりに、Ａはただ「石版！」「角石！」という。２以上の数については同様とする。このやりかたに慣れた人は（２）のやりかたを習ったときには、１を２以上の数とは別に分類するだろう。

10.1.2　無限系列を含む言語ゲーム

「さて、限られた数の数字で行われるゲームだと考えてよい言語ゲームと、数字の無限系列を使って行われる行われるゲームだと考えてよい言語ゲームとを比べてみよう。」

(23) (2) と同様、ＡはＢに幾つか幾つかの石材を持ってくるように命じる。数字は記号「１」「２」･･･「９」であり一つづつ一枚のカードに書かれている。Ａはこういうカードを一揃えもっていて、Ｂに命令を与えるにはその中の一つを彼に見せ、そして「板石」「柱」、等の語を呼び上げる。
(24) 数字の記されたカードがない点以外は (23) と同じ。数字 $1, 2, \cdot, 9$ は記憶される。数字は命令の中で呼び上げられ、子供はそれらを口頭で習得する。
(25) 算盤が一つ使われる。Ａが算盤に数をはじいてそれをＢに渡す。Ｂはそれを持って板石のある所に行く、等。
(26) Ｂは一山になった板石を数えなければならない。Ｂはそれを算盤でやるが、その算盤の珠の数は２０である。しかし一山に２０個以上の板石があることはない。Ｂは、数えるようにを求められた山に対して算盤をはじき、そのはじいた算盤をＡに見せる。
(27) (26) と同様だが、算盤には２０の小さな珠と一つの大きな珠がある。山に２０以上の板石がある場合には、その大きな珠が動かされる。
(28) (26) と同じ。一山に n 個の板石 ($20 < n \leq 40$) があり、Ｂは $n - 20$ 個の珠を動かす。その算盤をＡに見せて手を一回打つ。
(29) ＡとＢは十進法の２０までの数字を使う。ただし、子供はこれらの数字を暗記するだ

けである。

(30) ある部族が (2) の種類の言語を持っている。十進法の数字が使われる。観察しても、どの数字も最高の数字としての支配的な役割を果たしていない。学習は 20 までを (2) と同様に行う。20 まで数えたときに、「さあ続けてごらん」という身ぶりを先生は行い、それに応じて生徒は 21 を言う。さらに同じような励ましにより 22 をいう。こうやって 20 より少し大きな数まで生徒は覚える。訓練の最後に 20 個よりかなり多い物の集まりが提示されて、それを生徒は数える。(20 以上の数を数えなさいという暗示に反応しない子供は仲間から隔離されて、頭のおかしい者として扱われる)

(31) 別の部族。(30) と同じだが、159 までの数しか使わない。しかも、159 が特別な役割を果たしている。

(32) ある部族では 2 通りの数え方がある。A から Z までのアルファベットを使って数えることと、十進法を使って数えることを学ぶ。第一の方法は閉じた数え方とよばれ、第二の方法は開いた数え方と呼ばれる。開いたという言葉を開いた扉、ということにも使っている。

10.1.3 比較

- (23) カードの一揃えによって限界がある。
- (24) の記憶された語に限りがあることと (23) のカードに限りがあることとは性質が違う。
- (26) の限界は、道具と使われ方にある。しかし、この場合は使われる状況に限界があるので、道具の限界が顕になることはない。
- (27) では、大珠が方法の限界を強調する。
- (28) に限界があるかどうかは微妙である。一応 40 が限界だが、それを越える可能性を秘めている。
- (29) 数字の体系性が (28) よりもあらわに出ている。道具による限界はない。
- (30) 数字を限界なしに構成するように訓練され、その算術は有限のものではなく、彼らの数列には終りがないと言える。
- (31) その部族の子供が数字の使い方を訓練される仕方からは数字に上界がないと思われるにもかかわらず、その部族の算術は有限数列を扱うものだと言わざるをえない。
- (32) 我々の「無限」という語の用法は（31）の「開いた」の用法と全く同様に端的なものである。

10.2 角田によるクリプキの懐疑論の応用

10.2.1 Russel の逆理の懐疑的解決 (1998.5)

- $R = \left\{ x \,\middle|\, x \notin x \right\}$ は集合であるとしても問題はない。しかも $R \in R$ である。
  R が集合でしかも $R \in R$ だとすると、R は R に属する条件 $x \notin x$ を満たすから $R \notin R$ となって矛盾、と議論される。しかし、R は格別な集合なので、$x \notin x$ は $x = R$ については $R \in R$ を意味する、と定めればよいだけである。この変更によって普通の数学は何も変化しないので、今まで実はこういう集合論をしていたのだ、と考えた方が自然である。
- $R = \left\{ x \,\middle|\, x \notin x \right\}$ は集合であるとしても問題はない。しかも $R \notin R$ である。
  R が集合でしかも $R \notin R$ であるとすると、R は R に属する条件 $x \notin x$ を満たす。ゆえに $R \in R$ となって矛盾、という議論がされる。しかし、R は格別な集合なので、R は R に属する条件を満たすがゆえに $R \notin R$ であり、何ら矛盾は起きない。
- R は集合であるが、ゼロと同じように $R \in R$ は意味をなさないとする。

10.2.2 $a_n = 1$ で与えられる数列に 2 が現れるか

角田の例題 「犬はワンと吠える。」の犬に猫を代入せよ。

代入の懐疑

Q 式 $a_n = 1$ に $n = 2$ を代入すると $a_2 = 2$ である。

P 間違っている。

$$\text{「式 } a_n = 1 \text{ の } n \text{ に数 } k \text{ を代入すると } a_k = 1 \text{ である。」} \qquad (1)_{n,k}$$

ではないか。

Q その通りだ。$(1)_{n,k}$ の k に 2 を代入すると

$$\text{「式 } a_n = 1 \text{ の } n \text{ に数 } 2 \text{ を代入すると } a_2 = 2 \text{ である。」}$$

だから、$a_2 = 2$ となるのだ。

P また間違えている。

$$(1)_{n,k} \text{の } k \text{ に } \ell \text{を代入すると「式 } a_n = 1 \text{ の } n \text{ に数 } \ell \text{を代入すると } a_\ell = 1 \text{ である。」} \qquad (2)_{n,k,\ell}$$

ではないか。

Q その通り。$(2)_{n,k,\ell}$ の ℓ に 2 を代入すると、

$(1)_{n,k}$の k に 2 を代入すると「式 $a_n = 1$ の n に数 2 を代入すると $a_2 = 2$ である。」

となる。だから (1,2) から $a_2 = 2$ を得る。

10.2.3 数学科でのふつうの会話の誇張形

（阪大の角田氏の集中講義より）

(1) 「公理のひとつに $\emptyset \notin \emptyset$ があるね．それを書いてごらん.」
(2) 学生が $\emptyset \notin \emptyset$ と書く。
(3) 「私は $\emptyset \notin \emptyset$ と書けと言ったのだ。君も $\emptyset \notin \emptyset$ と書こうと思ったはずだ。だからそれは間違いだ．$\emptyset \in \emptyset$ と書かなければいけない。」

もっと単純化すれば

(1) 「黒板に 5 と書いてごらん.」
(2) 学生が 5 と書く。
(3) 「私は 5 を書けと言ったのだ。 君も 5 を書こうと思ったはずだ。だからそれは間違いだ．本当は 3 を書かなければいけない。」

10.2.4 外延性定理の適用

角田（[2]）の議論。$\forall x[x \in y \equiv x \in z] \Rightarrow y = z$ より $\emptyset = \{\,\emptyset\,\}$ が導かれる。

まず、$\emptyset \subseteq \{\,\emptyset\,\}$ は明らか。そこで $a \in \{\,\emptyset\,\}$ とする。このとき $a = \emptyset$. しかし空集合 $\emptyset$ の定義より、$\forall x[x \notin \emptyset]$. 従って、$x \notin \emptyset$ が $x = \emptyset$ についても成立。**ゆえに、**$\emptyset \in \emptyset$. よって $\{\,\emptyset\,\} \subseteq \emptyset$. 以上により $\emptyset = \{\,\emptyset\,\}$ となる。

参考文献

[1] ソール A.クリプキ (黒崎宏訳)「ウィトゲンシュタインのパラドックス」産業図書,1983. ISBN 4-7828-0017-7.

[2] 角田秀一郎「数学と存在論的観測」 、複雑系札幌研究会講演 1999.3 (“**FCS**/kaken/993program.html”, 予稿:“**FCS**/doc/tsunoda/tsunoda99-2-10.pdf”）

[3] ウィトゲンシュタイン全集. 大修館書店 1976–1988. ISBN 4-469-11010-8(全 12 巻).