12 連続体の逆理

「自然数の全体」なるものには不定性がいつも残ることをいくつかの角度から調べてきた。数学における概念や議論はいたるところで自然数集合の確定性に基づいているために、自然数の不定性を隠ぺいしないとき、数学全体は新たな多様な不定性を露呈する。実数の母胎である連続体は、古来、分析的理解を拒む謎であり続けたがそれは、この不定性を意識したものであったということができよう。

12.1 議論（推論）について

12.1.1 素朴な見方

正しい理論の中では、正しい前提から、正しい推論の繰り返しによって得られる結論は正しい。

この対偶をとると

議論の結果矛盾が生じたとき、

- 前提が正しくないか、
- 推論の仕方が正しくないか、
- 理論が適切でないか

のいずれかである。

12.1.2 より適切な見方

上で使われた理論・前提・推論・結論・正しさ・矛盾等が明確な確定した意味を持ったものではない。上の言明が、これらの言葉の相互関係に重要な制約を与えている、と言った方がやや適切である。

「理論・前提・推論・結論・正しさ・矛盾・パラドックス」等の登場する言語ゲームを我々は行っている。そこでは、「前提から推論によって得られる結論が適切なものである」ということが核となる相である。しかし、理論に矛盾が見出されることはこのゲームの重要で不可欠な役割を持っている。矛盾の由来が明確に特定できず、矛盾を自然には解消できないとき、パラドックスという言葉が使われる。パラドックスの出現を、素朴な（あるいは既製の）理論化には捉えられない現実相の出現と考えるかどうか、この言語ゲームの、大きな岐路となる。

12.2 ゼノンとパルメニデス

12.2.1 パルメニデス

ゼノンは先生であるエレア学派の創始者パルメニデス (BC 515-450) の教説を擁護するために一連の逆理を呈示した。

> 「若き日のパルメニデスが真昼の光よりも明るい真理に出会った爆発的な体験から出発し、それを改めて言葉で「有る！」と受け止め直す「探究」の言語を創造したのがパルメニデスの哲学であって、いかなる前例もない金字塔である。それは、無条件に「有るかないか」の有の道と無の道の厳しい判別から始まり、無の道と有の道を混同する日常経験の道を共に退け、＜今、ここで、わたしに＞一点の欠けることなくすべてが「有る」として、存在がかけがえない唯一の完全体の相貌で析出された。そして「無い」が退けられたがゆえに、存在そのものは不生不滅不変不動と語られたのである。こうして哲学史上始めて存在が哲学の目標として登場した。弟子のゼノンは，亀にアキレスが追いつかないパラドックスを考案して運動否定論を唱え、先生の説を擁護した。」（岩波哲学辞典より）

12.2.2 アキレスと亀

アキレスと亀が競走をした。亀のスタート位置をアキレスより先にすると、アキレスは亀には追いつけなくなってしまう。理由はこうである：亀のスタート位置 P_1 にアキレスが達したときには、亀は少し先 P_2 に進んでいる。P_2 にアキレスが達したときには、亀はさらに少し先 P_3 に進んでいる。このように亀が居るところ P_n にアキレスが達しても亀はいつもその先 P_{n+1} に進んでいるので、アキレスが亀に追い付くことはあり得ないのである。

12.2.3 逆理の分析

次の主張が矛盾する。

(A) アキレスは亀を追い抜く。

(B) アキレスは亀を追い抜くまでに、無数の異なる点 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ を通過しなければならない。

(C) 無数の異なる点を通過し終わることはあり得ない。

(A,B) よりアキレスは無数の点を通過するが、それが (C) と矛盾する。

問題. ゼノンの議論のどこがおかしいか？

12.2.4 いろいろな「解決」

矛盾が理論・推論・前提の誤りから生じることが指摘できたとき、パラドックスは解決されたという。

解決 0. 実際にはアキレスは亀を追いこすのだから、ゼノンの議論は詭弁に過ぎず全く無意味だ。どこがおかしか考えることも無意味、時間の無駄である。(問題が無意味であるという解決。)

解決 1. (C) の表現は適切ではない。正しくは
(C') アキレスは点 P_1 を通過し、点 P_2 を通過し、点 P_3 を通過し、... という**報告**が完了しないのであって、アキレスが点 P_1, P_2 達を通過し終わっていても矛盾はしない。いわば、アキレスの動きの速さに観戦記者の解説がついていけないだけである。

解決 2. (B) の中の「無数の点を通過する」という言い回しに問題がある。これは、アキレスが通ったはずの点をいくらでもたくさん指摘できる、ということに過ぎない。つまり、$P_1, P_2, \cdots, P_n$ までアキレスの動きを記述したあとで、まだ記述していない P_{n+1} がある、ということを意味するだけだ。

これは (C) とは矛盾しない。こうしてパラドックスは見かけのものであることがわかった。終わらないのは、アキレスが亀を追いこすまでに起こる事象の中で記述者が着目した事象を記述することであった。従って、記述者の着目の仕方が悪かった、ということができる。

解決 3 (B) がおかしい。無数にあるのは数学的な点という虚構であって、現実の世界には無数の点があるわけではない。（現実世界の直線と、数学的直線の関係に問題がある。）

解決 4 この解説者は、追い抜く点を含まない記述系を採用してしまっている（追い抜く前までのところだけしか視野にない）。もしも、xt 平面上のアキレスと亀の軌跡を直線で表せば彼等の交わるところがあることがわかる。

12.2.5 運動の謎

上の解答は、アキレスが亀を追いこすまでに起こっていることの記述法としてはゼノンの中の観戦者は目のつけどころが不適切なことを指摘している、と言える。

この解決から、ゼノンが本当に言いたい次の質問へ導かれる。

では、アキレスが亀に追い付くまでに起きたことを「理解」できるか？

例：軌跡による幾何学的記述 ● xt-平面上のアキレスの軌跡は亀の軌跡と交わる、ということで追い付く様相が明確に記述できている。

● xt-平面上のアキレスの軌跡とアキレスの運動とはどういう関係にあるのか？

しかし、ゼノンはこの幾何学的直線とアキレスの運動とがどう関係しているかを問題とする。この関係を述べようとして、直線上の点とアキレスの運動における通過点とを対応つけようとすると、対応つけは決して完了できないということになり、ゼノンの逆理の「解決」で指摘された記述の問題が発生する。

●「すべての t について、アキレスは時刻 t に 出発点から $10t\mathrm{m}$ の位置にいる」ように関係している。

これは、単に幾何学的直線として運動を表現している、ということを少し数学的響きのある言葉で言い直しただけだ。直線と運動との関係を実際につけようとすれば、**いろいろな t の値**について、アキレスの位置を確認するしかないであろうが、これも、アキレスのパラドックス法と同じ問題に陥る。

なお、軌跡による説明では「幾何学的直線」自身が「連続性の逆理」を伴っていて混乱の度は深まる。

12.2.6 ゼノンの逆理に対する現実的態度の色々

この逆理に対する態度は様々である。単純化すれば、次ぎのようになろう。

1. 中学の数学を勉強すれば馬鹿げた詭弁なことがわかる。こんなことを 2 千年に渡り大哲学者達が問題にしてきたとは、哲学とは何と暇つぶしな学問か。
2. 運動を合理的に理解することはできるはずだが、この逆理が示すように、それは「無限」や「連続性」の問題が絡んでいて手強そうである。しかし、よく考えたら明確になりそうである。実数が問題なければ、運動は明確に理解できたことになるだろう。
3. パルメニデスが主張したように運動は単一で分析不能である。運動を整合的に理解はできない。

12.3 「実際」と「理論」について

実は、実際にはアキレスが亀に追い付くかどうかは明らかではない。明らかなのは、**何らかの理論上**のことであり**実際には**わからない。

つまり、**この問題は、現実と論理の間の対立が問われているのではなく、現実についてのいろいろな論理の間の関係が問われている．**

- ゼノンが採用した理論化（記述法）ではアキレスが追い付かないのは記述法自身の構造に由来する.
- 一方「実際に追い付くのは明らか」なのは、実は競争の状況を、時間−距離の平面による運動表示で記述した場合の記述の中でのことである.

  この記述法では、現実世界は時空として捉えられ、それが数学的平面として表現されている.

  パルメニデスは、存在を時空という形式で捉える尽くせるという考えを拒否した、と解釈したい.
- **「現実に追い付くかどうか」はやってみないとわからない.」**ことは自明。追い付くとしか思えないが、「実際には」いろいろな（予想外の）事情で追い付かないことは有り得る.（再度注意！いろいろな「実際には」はそれぞれ一つの理論化である。） とはいえ、「アキレスが亀を追い抜くかどうかはやってみないとわからない」と主張することは、この講義の文脈以外では、単に揚げ足取りにしかならないだろう。
- 思考実験は実験ではなく理論である。

12.4 方法的懐疑

知っている知識を深く理解するには、ある時に懐疑することが有効である。

- 何をどこまで懐疑すべきかは不定である。
- 一度に懐疑できるのはわずかなことだけである。
- 懐疑の念（何か変だと思うこと）自身は生命の本質に属する本能的なものであるが、その使い方自身は学ぶ必要がある。

なお、現実的知識（あすも世界は存在する、世界は今発生したわけではない、欧米は本当に存在する、など）の確実性は、生活がその上に築かれている、ということ以上の意味はない。確実だから、その上に生活を築いているわけではなく、その上に生活を築いているので確実と言われている（これまでによく出てきたパターン）。

「様々な知識の確実性の上に生活が築かれている」という言い方は転倒している。「確実性」を自立した理論的なものとして議論するのは的外れである。

- 例：「明日も太陽が登る」ことには何の保証もない。しかし、正確には「明日も太陽が登ることに保証がある」という文に意味を与えることはできない、というべきである。「明日も太陽が登る」ことは＜保証の有無＞などといった事柄とは何の関係もなく、我々の生活の自明な基盤の一部となっている。

12.5 問題設定のあいまいさ

1. 学問分野の間で、問題設定の明確さの要求には大きな違いがある。
2. 明確さの有無は問題の重要性とは余り関係はない。
   - 「あいまいな」問題も生産的な機能を果たす。
   - 問題の中には明確にしようとすると肝心なものが消滅するように思えるものがある。（e.g. 生命とは何か。精神とは何か。問題とは何か。形式化とは何か。規則とは何か。）
   - 問題の中には明確にすることが解決であるものもある。工学的な問題はその種のものが多い。（アポロ計画の最初の問題設定は「人を月の上に立たせよ」であった。）
3. 数学では、問題設定が明確になってから研究が始まる。数学的な問題として定式化することが自然科学の主要な努力になる。
4. どの分野でも、肝心な問題は何かというメタ問題はいつもある。

しかし、上では「明確さ・あいまいさ」というものが明確にあると仮定しているが、その客観的な基準があるわけではない。数学者には明確さと見えるものが、数学を使うものから見れば、明確さを損なう衒学と見えるはずだ。

数学的明確さ、というものが普遍的にあって、それが価値があるものと考えることは数学を制限することになる。数学研究の現場でも「適度な明確さ」しか重視されていないのである。