目 次

10 クリプキの懐疑の諸相（続き）

10.3 角田による例：生徒と先生の会話

10.3.1 例１：阪大での集中講義

「先生が、最初に「黒板に５と書け」というわけです。これはあまりにプリミティブで、阪大の学生さん方はちょっとこいつは何を言っているんだというかもしれませんが、何かあやしい、裏がありそう、あまりに小学生に言うようなことなので、学生が一応、「５と書くんですね」と確認するわけです。先生が「そうだ」と言う。学生が５と書くわけです。そうすると、先生が、「私は５を書けと言った。君も５を書くものだと思ったはずだ」で、学生は、「ええ、だから５と書きました」と。先生は、「書くべきなのは３だろう」と言うわけです。学生が、わけがわからなくなる。」

「これはどこが懐疑論なのかというと、これは学生も先生も「５と書く」ということについては全く合意している。それは５を書く。ところが、この先生は、最後に「書くべきなのは３のはずだ」と言う。「３と書かれてない」といって怒っているわけです。これはどういうことか。ここでいろんな誤解がある。これは何を問うてるかと言うと、「５を書け」というのは、本当に「５を書け」ということなのかということを言っているわけです。言表可能ぎりぎりですね。」

「これ、学生さんが入っている、人によりますが、学生と先生がいるからややこしいという人は、学生の代わりにタイプライターとか、ワープロでも構わない。コンピューターでも構わない。「５を書け」という代わりに、「５」というふうにキーを押すことを考えれたらいい。もう入力待ちになっているのに、「５」というキーを押したら、画面に「５」と出てくる。そのときに、この先生は怒り狂って、コンピューターを壊してしまう。「５」のキーを押して、「５」を立ち上げようとしたのに、「５」が出てきてしまう。出なきゃいけないのは、「５」を出そうと思ったんだから、出なきゃいけないのは「３」だというわけで、コンピューター

を壊す。こういうことです。」

「何を問うているかというと、もう一度言いますと、「５を書け」ということは、本当に「５を書け」ということなのかというのを問うている。これはこれで単なる懐疑論で、「何を言ってるんだ、この野郎」と思うんですが、核心は、「数学を教える、教えられる」というのは、これの繰り返しであると。だから、学生さんが最初、最初数学がわからない。それは当然ですが、それを繰り返して、もう十分わかったつもりでも、全然無茶苦茶なことを言われる。それが、実は起こっている。このことについては、ほとんどもちろん自覚的でないわけですが、それをこの懐疑論で明らかにしようと、こういうことです。」

「ちょっと元へ戻して、それじゃ、数学を教える、教えられるのことだったら、いつでも学生に無理強いしているのかというと、そうなんですが、それで、じゃ、無理強いするのやめるかというとやめるわけないわけで、その無理強いを繰り返す。当然繰り返す。私もそうですけれども、繰り返している。要するに二千年来の数学、数学に限らない、後で出てきます学問の積み重ねがこの数行で破壊された。これはウィトゲンシュタインです。この数行で、完全に完膚なきまでにつぶされているんですが、だからこそ、そんなのもう無意識的に排除するわけで、いや、これはこういう意味だという、ここの懐疑論はこういうふうに考えれば解決できるのか、その懐疑論自体が意味がないとか、そういうのがたくさん出てくるわけです。だから、これを素直にふんふんふんふんといって読めるとあれなんですが、しかし、これ、素直に読んだ場合には信じられないというふうな反応が普通ですし、それを期待しているわけです。」

「「５を書け」と言ったときに、「５を書く」ということに対して、自然主義と規約主義という立場が大体あるんですが、それから抜け出すためにウィトゲンシュタインがこういう懐疑論を考えた。　だからこそ、ウィトゲンシュタインというのは自然主義からも、規約主義からも攻撃されていて、自然主義の人たちは「お前は規約主義だ」と言って批判するし、規約主義の人は「お前は自然主義だ」と言って批判されているわけです。それは両方から抜け出しているということに気がついてないからそうなんで、その両方から完全に抜け出している。」

「５を書くシュミレーションさえできる。これはできない人もちろんいるかもしれませんけれども、僕はできます。「５を書く」というか、５を書こうと思ったときにちょっと練習してみる。５を書くときにシュミレーションさえできる。

「それは、例えば「３を書く」ときとは全然違う。「３を書く」ときというのは、大体こういうふうに書くわけで、「５を書く」ときと全く異なる。だから、シュミレーションしている「５を書く」ということから、それを単に実際に黒板の前でチョークを持って「５と書く」わけだから、それは「３と書く」のとは全然違うことだから、先生に詳しく「５を書け」というのはどういうことか聞いたら、「３を書く」ということはなくなるんじゃないかというのが、懐疑論に対する反論なんですが、それに対して、もう１回反論で、頭の中の「５」と書かれた「５」が同じようなものであるということに意味はない。」

つまり普通は、頭の中で書かれた「５」というのと、書かれた「５」というのが、それは普通同じようなものだと思うわけですが、同じようなものであるということに意味はない。同じようなものが定義できるとか、定義できないとかそういうことじゃなくて、同じようなものであるということに全く意味はないわけです。ということを言っている。

ここは、というふうに言っても、まだ何を言っているかわからなくて結構です。ここでわかったら、もう本当に、僕から称号を与える、天才の称号を出してもいいぐらいで、ただ、言ってることを確認してもらえばいい。言ってるのは何かというと、頭の中の「５」と書かれた「５」が同じようなものであるということに意味がないということを言ってるということを確認してもらえば、ここはそれで十分で、そこを敷衍しますと、暗算は計算とは何の関係もないというふうになります。両方頭の中で計算している、それは実際の筆算とは全然関係ない。

10.3.2　例２：「プラスクワスの懐疑論数学版」

１９９８年複雑系札幌シンポジウムでの講演「数学と存在論的観測」予稿[1]より。

「いわゆるプラスクワスの懐疑を理解するのは難しい（人にもよるが）. 私は次の文で理解できたように思う.「グルー」は，過去においてはグリーンを意味し現在においてはブルーを意味する単語と思ってよい.

> 問題は，帰納に関する Goodman の問題『なぜ，過去においてグルーであった草は未来においてもグルーであるだろう，と予測しないのか.』ではなく，意味についての Wittgenstein の問題『過去において私が「グリーン」によってグルーを意味していなかったのなら，今私が，草ではなく空を「グリーン」と呼ぶことなど，万が一にもあるだろうか.』なのである.（Kripke[1, p113]）

わかる人には，この一文でわかるだろう. しかしいろいろな例を見ることが理解の妨げにはならないと思われる.

数学での例を出そう. 俳句の個数を上から評価することを数学の問題として考えてみよう. 数学なので,「堅い鯛」と「肩痛い」は同一視し，日本語の音節の数は 200 以下とする. 要素の数が 17 である集合から要素の数が 200 の集合への写像全体 X は 200 17 個の要素をもつ. したがって，俳句の個数は 200 17 以下である. これは数学という言語ゲームにおいて正しいと言われる. 簡単に,（高校）数学の一命題と言ってもよい. Wittgenstein にはじまるプラスクワス的懐疑とは，一言で言えば,「X になんの意味があるのか」である. 質問の一部だから,「意味」の意味は説明できない. じつはその先もあるが，とにかくこの質問を理解することが最初の一歩である. 問題なのは質問の意図を勘違いしやすいことだ. 意図を「say 」することはできず,「show 」することのみが可能だからである. ここが難しいところと言える. そこで次のような議論を展開することになる. X は 1 から 200 までの数字を 17 個並べたもの全体と同じである. プラスクワスの議論は，たとえば,

93; 143; 2; 14; 136; 11; 151; 43; 60; 97; 15; 128; 127; 43; 85; 5; 60

（ふるいけや...）は X のひとつの要素であるが,

91; 2; 13; 64; 91; 140; 128; 15; 60; 64; 12; 83; 58; 12; 140; 11; 81

は X ではない，と主張する人を「論理的」に説得できるか，というものである.「後の方の数字の列は 17 個の数字を並べたものではない」とか「後の方の数字の列は 17 個の数字を並べたものではあるが，X の要素ではない」という人を論破できるだろうか. これは，経験則のような帰納を懐疑しているわけではない. 人間は X の要素をすべて書き下すことはできないはずだ，という懐疑ではない. X はどれだけ厳密に定義しても，いろいろ解釈されうる，という懐疑でもない. 要素すべてを見渡せなければ X を知ったことにはならない，という懐疑でもない. X は存在するのか，という懐疑でもない.（数学的に X を

[1] http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/people/tsunoda/tsunoda99-2-10.pdf

含む無矛盾な公理系の存在が証明されているとしてもよい.）ではなにをどう懐疑しているのか．理解するまえにはそれがわからないところが，この問題の核心とも言える.」

11 数記法（続き）

11.5 数の普通の定義についての補足

「次々と」への信頼は実無限への信頼に基づいている。推移的閉包という操作も同じである。

何が自然数かという問いに対して、

> 「0 は自然数であり、自然数 n には次の自然数 n' がある。しかも、違う自然数の次の自然数は違う。0 から始めて、次の自然数をつくる操作を次々と行って得られるものを自然数という。」

という答えがある。この答えは循環している。それは「『次々と得られる』とはどういうことか」と「何が自然数か」とは同じ深さの問いだからである。

数学的帰納法の仮定は

$$P(0) \ \wedge \ \forall n \ [\ P(n) \Rightarrow P(n+1)\ ]$$

である（この仮定を満たす性質を帰納的性質ということがある）。このことから、P を満たす数を新たな数 P–数と呼ぶとすると、この仮定は

「0 は P–数であり、P–数 n の次の自然数 n' も P–数である。」

ということである。このことから、

- 1 から次々と得られる P–数
- 1 から次々得られる数

とは、「次々得られる」という言葉の意味が確定しているならば、すべての数は P–数となり、数学的帰納法の結論が正しいことになる。逆に数学的帰納法が正しければ、種々の帰納的性質によって自然数の概念に変化は起こらないことを意味し、それは「次々と」という表現の意味が決まっていることを間接的に主張することになる。数学的帰納法は自然数列唯一性と同じ主張である。

Nelson の predicative arithmetic では、数学的帰納法を仮定しないために、帰納的性質が見つかるごとに、数の概念を変更していくことになる。

11.6　例：角田による生きた数

11.6.1　引用

以下は、[3] の一節である。

(0) 自然数は 1 からはじめて、n に対して次の数 $n+1$ を作る。どんな自然数 n に対しても $n+1$ があるから自然数は無限にあると言われる。これが自然数である。

(1) まず，1 と書く．

(2) ここで，書くことと 1 は分離されていないが，実際は分離される．

(3) 自然数 1 の存在が保証されている．

(4) しかし，そう記述してしまうと，1 の保証されない可能性を指示してしまう．

(5) 「自然数 1 の存在」 は，書かれた 1 が自然数の 1 ではないことだったかもしれない．

(6) 記号としての 1 を考える．

(7) この 1 が自然数ではないとする．

(8) われわれの構成的自然数では 1 が自然数の始まりであった．

(9) したがって，1 は自然数だと議論する．

(10) しかし，1 は自然数ではないとしているのだから，1 の存在を保証したことが 1 が自然数ではないことを意味するとも言える．

(11) どちらも，1 が自然数ではないことを認めた上で，構成的自然数の持つ前提に適合すると述べている．

(12) だから 1 は自然数 ではない．

(13) 違うのはその後の対応である．

(14) 「1 は自然数ではないこと」は気にいらないので「もみ消す」か，そうしないか．

(15) 1 を作る操作はあるが，数としての 1 はない．

(16) 構成的自然数の前提が 1（の存在）を保証すること自体が，実は 1 が自然数ではないことを意味することになる．

(17) これが「何もない自然数」である．

(18) 1 が自然数なのに何も自然数ではないと言っているのではない．

(19) 1 が自然数だったからこそ，何者も自然数にはならないと言っているのである．

11.6.2　辻下による 1999.8.28 の吟味

>(1) まず, 1 と書く.
>(2) ここで, 書くことと 1 は分離されていないが, 実際は分離される.

＜実際は＞は「通常の議論では」という意味だろうか。あるいは、書き終わると分離される、という意味だろうか。

> (3) 自然数 1 の存在が保証されている.

これは「今基盤としている構成的自然数の枠組みでは自然数 1 の自然数が保証されている。」ということ。

> (4) しかし, そう記述してしまうと, 1 の保証されない可能性を指示してしまう.

この部分はテーマの核心になるので、

(4') しかし，そう記述してしまうと，1 の存在が保証されない＜状況＞もありうる知的地平に我々が居ることが露わになる、そうでないのなら、保証などする必要　はないから。

というような、多少説明的な表現が必要かもしれない。

> (5) 「自然数 1 の存在」 は, 書かれた 1 が自然数の 1 ではないことだったかもしれ
> ない.

これは (4) で浮上した、1 が存在しない方の＜状況＞で言えば、「自然数 1 の存在」は，書かれた 1 が自然数の 1 ではない、ということを指摘するものであったとも思える、ということではないか。（クリプキの懐疑論の＜応用例＞＞）

> (6) 記号としての 1 を考える.

自然数 1 がないという状況の話を進めていくと、当然、書いた 1 は単に記号となるので、これを記号として考える、ということであろう。

> (7) この 1 が自然数ではないとする.

これは、今想定している状況を確認。

>(8) われわれの構成的自然数では 1 が自然数の始まりであった.
>(9) したがって, 1 は自然数だと議論する.

これらは、構成的自然数で話をしていることの確認。

> (10) しかし, 1 は自然数ではないとしているのだから, 1 の存在を保証したことが 1 が
> 　自然数ではないことを意味するとも言える.

これは、(5) を再確認。

>(11) どちらも，1 が自然数ではないことを認めた上で，構成的自然数の持つ前提に
> 適合すると述べている．

ここで、(4) で露呈した１が自然数でない可能性を真剣に追及しても構成的自然数を展開できることを指摘。

> (12) だから 1 は自然数 ではない．

だから１が自然数ではないのに、全く普通の構成的自然数の議論が展開できる数学が＜ある＞ことがわかった。

> (13) 違うのはその後の対応である．
> (14) 「1 は自然数ではないこと」は気にいらないので「もみ消す」か，そうしないか．

「気に入らない」は弱いかもしれない。多分「正気の沙汰ではないので」くらいの感じではないか。

> (15) 1 を作る操作はあるが，数としての 1 はない．

ここの「１を作る」は、(1) における、書くという行為のことであろう。

>(16) 構成的自然数の前提が 1（の存在）を保証すること自体が，実は 1 が自然数では
> ないことを意味することになる．

これは、(4) を言い直したもの。ここでも、１が自然数ではない数学を追及していることが前提になっている。だから「意味することになる」と言える。

> (17) これが「何もない自然数」である．

こうして、構成的自然数の枠組みに従う「何もない自然数」が見いだされた。

> (18) 1 が自然数なのに何も自然数ではないと言っているのではない．
> (19) 1 が自然数だったからこそ，何者も自然数にはならないと言っているのである．

正確には「自然数１が存在すると保証したからこそ何者も自然数にはならない、と言っているのである」ということではないか。

11.6.3 辻下の注釈

- 最初から当然１はあるとして話をしている段階 (１９世紀？以前) では、１がない可能性はなかった。

- 数についての疑念が生じることと 1 の存在しない自然数が発生することとは同時である。
- 数についての疑念が生じた瞬間から、従来の素朴な「唯一の数」を回復する可能性などもはや何もなく、多様な数の世界が論理的に同じ権利で存在し、それらの一つを特定することすらできない状況になってしまう。
- この状況の例示として (1-19) で、1 が自然数ではない自然数という極端なものですら分離・排除できないことが示された。

参考文献

[1] ソール A. クリプキ (黒崎宏訳)「ウィトゲンシュタインのパラドックス」産業図書,1983. ISBN 4-7828-0017-7.

[2] 角田秀一郎「数学と存在論的観測」 、複雑系札幌研究会講演 1999.3 (“**FCS**/kaken/993program.html”, 予稿:“**FCS**/doc/tsunoda/tsunoda99-2-10.pdf”)

[3] 角田秀一郎「数学と複雑系」. 数理科学連載「数学の未解決問題」, 2000.

[4] 角田秀一郎「数の脱構築」.

[5] ウィトゲンシュタイン全集. 大修館書店 1976–1988. ISBN 4-469-11010-8(全 12 巻).

13　実数という実無限

コーシー・ワイエルシュトラースは「実数」を発明し、「客観的」な議論の仕方を与えたと言える。実数が「仮想的な存在」であるため多くの不定性がある。超準解析はその不定性を利用したもの例となっている。

「実数が確定する」は「無限集合が確定する」と同じ性質の主張であると思われる。

カオス力学系が示す非決定性は、実数の不定性の現れに過ぎないということもできる。

簡単のために単位区間 $[0,1]$ 上の力学系 $\tau:[0,1]\to[0,1]$

$$\tau(x)=2x \mod 1$$

を考える。$[0,1]$ は「仮想的な集合」で、「その上の点を決める」という表現は、実無限を認めることと同じであるので使わないことにする。

そうすると、「力学系 $([0,1],\tau)$ を考える」と言っても、まだ考えを展開する「土台」が明確に決まったわけではないことがわかる。

例えば、この式を考えるため「点を追う」という試みをするとき、どこかで、恣意的な選択（最初に点がどこであったかを逆に決めるような行為）が必要となる。その為、結局、分析は区間の変化を見ることになる。

これは記号力学系に移して理解することになるが、新しい土台を導入していると考えることができる。

「$0,1$ の無限列」も $[0,1]$ も実無限で不定性があり、有限のところでは全く同じであるので、

$$\{\,0,1\,\}^*=[0,1]$$

としても何も問題はない。($0.1111111\cdots$ などないが、それが $1.00000\cdots$ と同じであるとする必要はない。我々には２つは明らかに違うものである。)

シフト写像 $\sigma:\{\,0,1\,\}^*\to\{\,0,1\,\}^*$ は、有限の範囲では

$$\{\,0,1\,\}^{n+1}\ni(a_1,\cdots,a_{n+1})\mapsto(a_2,\cdots,a_{n+1})\in\{\,0,1\,\}^n$$

となり、同一集合上の変換にはならない。そこで有限離散情報しか扱えない計算機では、シフト力学系をシミュレートするときは、欠損する情報（最後の１ビット）を毎回供給しなければならないが、その供給の仕方は、数学的なシフトに論理的に制約されず、単に、我々のシミュレーションの結果への効果によって選択される。

何かをシフト写像という数学的形式で理解しようとしたとする。実無限の世界だけで議論を進めるのはいくらでも進められる。しかし、この形式を実際に使って現象を解析するときには、実無限という空手形を実際の何かに変えないといけないが、その際に無数の恣意的な因子が表面化する。その恣意的因子が時として現象の記述において決定的な役割を果たすことがある。