目 次

13 実数という実無限（つづき）

13.2 素朴超準数学

自然数に具体的なものとそうでないものとがあるとする。たとえば、１０進法とべきを用いて具体的にあらわされるものを具体的である、と考えればよい。その場合には、たとえば、アッカーマン関数などを用いて表される数は具体的でない、と言ってもよかろうが、具体的でない数、については不定なままにしておく。

むしろ、具体的でない数は「理念的なもの」であって、その振るまいは我々がいわば恣意的に決めることができる、と考える。そして、制約としては、具体的な自然数の世界には影響がでないようにすることだけとする。

具体的でない自然数が存在する、というのは実無限と同様に、単にそう「言う」だけであり、本当にあるかどうかという問いは意味をなさない。むしろ、具体的でない自然数、というものを使って数学をどのように展開するか、という点が問題となる。

大文字で具体的でない数を表わし、小文字で具体的な数を表す。

まず、２つの理念的な数については、それが等しいかどうかを語ることはできない、とする。すなわち、M, N が理念的な数であるとき、$M = N$ は無意味な命題であるとする。しかし、２つの理念的な数が異なるかどうかは語ることができる。（このことは、一つの性質に意味があっても、その否定には意味がない、という状況であることを述べている）

以下、M を一つの具体的でない数とする。これは、実際に何者かを心配する必要はないが、気になる人は新しい記法をみつけて今までにない数を書いてみせてもよい。

具体的な有限小数とは、桁数が具体的であるような十進小数とする。また、桁数が M である小数を仮想小数と呼ぶ。仮想小数はギリシア文字の小文字で表す。

２つの仮想小数 α, β は、その「具体的な桁がすべて同じである」[1]とき同値であるといい $\alpha \sim \beta$ と書く。

これは弱い意味の推移律しか満たさない。すなわち、具体的な n については推移律

$$\alpha_1 \sim \alpha_2, \quad \alpha_2 \sim \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1} \sim \alpha_n \;\Rightarrow\; \alpha_1 \sim \alpha_n$$

が成り立つ。具体的でない個数についてはこれが成り立つと考える根拠はない。（いわば、無限小の差が有限の差を生じてしまう危険性がある。）従って２つの仮想小数が同じという言い方は（「同じ」というのは強い意味での推移律を予想させるので）できない。

以下、解析学の最初の部分をどう変化するかを見てみよう。S. Lang "analysys I" を参考にしてみよう。

13.2.1 Algebraic Axioms

実数　２実数 x, y の和 $x + y$ が定まり、次を満たす。

A1 $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A2 $0 + x = x + 0 = x$ を満たす実数 0 が存在する。

A3 実数 x に対し、$x + y = y + x = 0$ を満たす実数 y がある。

A4 $x + y = y + x$.

これは、次のようようにかわる。

仮想小数　２つの仮想小数 α, β に対し、和と呼ばれる仮想小数 $\alpha + \beta$ があり次を満たす。和が唯一つ決まる、という主張は、２つのものが等しいかどうかを語るすべがないので無意味である。

A0 α, β が有限小数であるときは、$\alpha + \beta$ は通常の足し算となる。

A1 $(\alpha + \beta) + \gamma \sim \alpha + (\beta + \gamma)$.

A2 $0 + \alpha \sim \alpha + 0 \sim \alpha$ を満たす仮想小数 0 がある.

[1] これ自身には何の意味もないのだが

A3 実数 α に対し、$\alpha+\beta \sim \beta+\alpha \sim 0$ を満たす実数 β がある。それが唯一に決まるかどうか

A4 $\alpha+\beta \sim \beta+\alpha$.

以上から、0 は複数あっても、ほぼ等しいことがわかる。また、[$A3$] の β も複数あっても、ほぼ等しいことがわかる。

具体的な個数の和 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ はほぼ唯一に定義される。

13.2.2 Multiplication

実数の場合

M1 $(xy)z = x(yz)$.

M2 $xe = ex = x$ を満たす $e \neq 0$ がある。

M3 ゼロでない実数 x に対し、$wx = xw = e$ を満たす実数 w が存在する。

M4 $xy = yx$.

仮想小数の場合　2 つの仮想小数で、一つの整数部分が具体的な数であるときは、積と呼ばれる仮想小数が、同値を除いて決まるが、どれもほとんど同じなので、その一つを $\alpha\beta$ と書く。これは次の性質を満たす。

M1 $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$.

M2 $\alpha 1 \sim 1\alpha \sim \alpha$ を満たす $1 \neq 0$ がある。

M3 ゼロでない実数 α に対し、$w\alpha \sim \alpha w \sim 1$ を満たす実数 w が存在する。

M4 $\alpha y \sim y\alpha$.

1 や逆数 α^{-1} はほぼ唯一に定まる。

例　$\alpha^2 \sim 2$ を満たす仮想小数 α はいくつもあるが、それらは互いに同値である。

整数部分が具体的であるような仮想小数の具体的な個数の列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ については、その積 $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i$ がほぼ唯一に定まる。

結合律も、等号とはならない：

$$\gamma(\alpha+\beta) \sim \gamma\alpha + \gamma\beta.$$

13.2.3 Ordering Axioms

実数の場合　実数 x が正 $x>0$ かどうかを判定でき、

ORD 1. どの実数 x も $x>0, x<0, x=0$ のいずれかを満たす。

ORD 2. $x, y>0$ ならば $x+y, xy>0$.

これより、

In1. $x<y$,$y<z$ imply $x<y$.

IN2. $x<y$ implies $xz<yz$.

In3. $x<y$ implies $x+z<y+z$,

In4. $x<y$ and $x, y>0$ implies $1/y<1/x$.

仮想小数の場合　実数 α が正 $\alpha>0$ かどうかを明言はできるが、その否定は明言できないので意味を失う。実際、具体的な桁のところはすべて 0 であるとき、0 か正かを判断できない。

ORD 1. 仮想小数 α について $\alpha>0$ や $\alpha<0$ は符号を見れば判定可能だが、以前にも言ったように、 $\alpha=0$ を判定できないので意味がない。しかし、$\alpha\sim 0$ または $\alpha>0$（$\alpha \gtrsim 0$）は、次ぎのような場合はわかる。

ORD 2. $\alpha, \beta>0$ ならば $\alpha+\beta>0\alpha\beta \gtrsim 0$.

これより、

In1. $\alpha<\beta$,$\beta<\gamma$ implies $\alpha<\beta$.

In2. $\alpha<\beta$ implies $\alpha\gamma \lesssim \beta\gamma$.

In3. $\alpha<\beta$ implies $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$,

In4. $\alpha<\beta$ and $\alpha, \beta>0$ implies $1/\beta \lesssim 1/\alpha$.

13.2.4 The Archimedean Axiom

実数の場合

Archimedean axiom 空でない実数の集合が上に有界ならば上限を持つ。

仮想小数の場合　仮想小数の全体は「有限」なので空でない仮想小数の集合は最大値を持つので、上の公理は自明なものとなる。

13.2.5 極限

仮想小数の有限数列 $\left\{ \alpha_i \;\middle|\; i \leq M \right\}$ を考える。ある仮想小数 α があって i が具体的でない場合には $\alpha_i \sim \alpha$ となっているとき $\lim \alpha_i \sim \alpha$ と書く。

13.2.6 連続性

写像 f が α で連続であるとは、$\alpha \sim \beta$ ならば $f(\alpha) \sim f(\beta)$ であることをいう。写像としては具体的多項式（項が具体的に書けるもの）がある。次数が具体的ではない多項式は連続とは限らない。