1999 度後期 数学専攻 4 年・大学院　数理科学講義

数学における不定性[1]

郡司の内部観測論と角田の数学の脱構築の紹介

序

0.1　講義の目的

複雑系の数理的研究は、郡司幸夫氏による内部観測論の展開により新しい方向性を持つようになった。内部観測は現代数学との接点がないと考えられているが、内部観測が数学自身にとっても極めて重要な意義を持つことが角田秀一郎氏によって次第に明らかにされつつある。それは、数学を岩盤からゆさぶる力を持っているだけでなく、そこから始まる数学の新たな進化は、生命研究における新たな役割に数学を導いていくことが期待される。

前世紀に集合がまともな数学的概念であると納得するのは容易ではなかったと想像されるが、内部観測と数学の関係が腑に落ちるには、同質の（あるいはそれ以上の）心理的ハードルがある。

内部観測論の核心をなす概念は不定性にある。不定性と言っても、確定に対する否定形としての不定性ではなく、原初的な不定性である。この不定性、還元不能な不定性が、集合論に馴染んでいるわれわれには理解しにくいのである。

この講義では、現代数学の基盤変更の試みの紹介を通して、＜数学の不定性＞に様々な角度から照明を当てたい。

0.2　講義の予定

- 序：複雑系と不定性
- 形式系と集合論の概要
- 内的集合論（超準数学）（多様な有限への入門として）
- Essenin-Volpin の超有限主義
- predicative arithmetic(Nelson)

[1] http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/am99.html

- Beck の実数論
- 郡司幸夫氏の内部観測モデル
- 角田秀一郎氏の自然数論の脱構築

0.3 参考文献

[1] ウィトゲンシュタイン全集４巻（哲学的文法第二部、論理学と数学について）

[2] ウィトゲンシュタイン全集７巻（数学の基礎）

[3] ソール A. クリプキ (黒崎宏訳)「ウィトゲンシュタインのパラドックス-規則・私的言語・他人の心–」産業図書１９８３,ISBN 4-7828-0017-7.

[4] A. Robert. Nonstandard Analysis, John Wiley 1985, ISBN 0-471-91703-6.

[5] E. Nelson. Radically elementary probability theory, Princeton University Press 1987, ISBN 0-691-08473-4.

[6] E. Nelson. Predicative arithmetic, Princeton University Press 1987, ISBN 0-691-08455-6.

[7] J. Beck. Simplicial sets and the foundations of analysis. In Applications of Sheaves, Proceedings, Durham 1977, Springer LNS VOl 753, 1979, ISBN 0-387-09564-0. p 113-124.

[8] A.S. Yessenin-Volpin. The ultra-intuitionitic criticism and the antitraditional program of foundations of mathematics, Intuitionism and proof theory, p3–45. Proceedings of the summer conference at buffalo NY 1968, eds A. Kino, J.Myhill, R.E. Vesley, North-Holland 1970.

[9] 郡司ペギオー幸夫「生命と時間、そして原生-計算と存在論的観測」現代思想 1994.9, 11, 12, 1995.4, 5, 8, 12, 1996.6, 9, 11

[10] 角田秀一郎

- 「二つの系と「自分」」 複雑系札幌研究会 1998.1
- 「数学と存在論的観測」 第７回複雑系札幌シンポジウム, 1999.3.
- 「ラッセルの逆理の懐疑的解決」奈良女子大学人間文化研究科年報第 14 号 (1998)
- 「数学の脱構築」 現代思想 1999.4.
- 「数学と複雑系」 大阪大学集中講義（理学研究科数学専攻）1999.5.
- 「数の脱構築」奈良女子大大学院年報, 2000.
- 「数学と複雑系」数理科学, 2000.
- 私信 (1998.4-)

[11] 辻下　徹

- 「生命と複雑系」(山口昌哉他著「複雑系の科学と現代思想ー数学」青土社 1998, pp75-225.）
- 「複雑システム学と数学の多様な関係」平成１０年度日本数学会秋季総合分科会企画特別講演予稿など
- 「高次元圏論の概要と意義ー複雑系の数理の文脈でー」999.3 JAIST 講演.

1 複雑系と不定性

1.1 生物機械論の逆理

[1.1-1] 複雑系科学は基礎生命科学の別称である（大野）。

[1.1-2] 分子生物学は生物を分子機械と見るが数理的記述には至らない。

[1.1-3] 従来の機械概念（力学系・確率過程）では不十分。

[1.1-4] 生物機械論の逆説性：生命の本質は不定性にあり、機械の本質は規則性にある。

[1.1-5] カオスの立場「不定性と規則性は対立しない」力学系も観測者には不定に見える。

1.2 複雑性の立場

[1.2-1] 機械概念（システム概念）は明確である。(「挙動が規則で規定される存在」, 数学的には力学系 (発展方程式・確率過程を含む))

[1.2-2] 規則概念は明確である。（これは、写像概念は明確である、という現代数学の信仰と同型）

[1.2-3] 生物もただの機械だが、生命性は複雑性から来る認識論的錯覚である。（実数は我々と独立に存在するが我々は近似的にしか把握できないのと同様、という主張）

[1.2-4] 生物も機械だが、境界条件を与える環境が複雑なので予測はできない。（オートマトンの挙動は入力を決めなければ決まらない。）生物機械論は環境が機械として記述できるときだけ数理化できる。

1.3 自己組織系論とその問題点

[1.3-1] 単純な素子の多数の相互作用規則に基づく相互作用系。

[1.3-2] 創発性 (emergency) の問題：全体としてのまとまりはいかに生じるのか。

- 脳から心がどのように生じるのか。
- 免疫細胞はいかにして免疫機能を果たすのか。

[1.3-3] 数学的筋書：（自己組織化）素子の規則的局所的相互作用から、全体としての（動く）秩序が生じる（例：アトラクタ、カオス遍歴、時空間欠性）。

[1.3-4] 問題：「全体としての秩序」を我々は先に知っている。これを数学的に記述することが必要。

[1.3-5] 複雑系は相互還元不能な複数の記述系を持っている。物理的記述系はその一つに過ぎない。

[1.3-6] 相互還元不能な記述系同士は、互いに不定性を持つ。

1.4 自分（観察者）の捨象の不可能性

[1.4-1] 「すべて」の逆理：すべてを一形式に入れることはできない。

- 物理的宇宙がすべてとすると矛盾が生じる。
- ラッセルの逆理：集合が数学的存在のすべてではない。

[1.4-2] 観察者（今考えている自分）を捨象する形式は無理。

[1.4-3] 逆に、どうして（数学と自然科学で）自分が捨象できているように感じるのか。

[1.4-4] 自分が理論に寄り添っていることに気付けば、普遍的な不定性が浮上する。

1.5 ウィトゲンシュタインの明証性

[1.5-1] これまで数学を支えてきてデカルト的明証性はウィトゲンシュタイン的明証性に進化する必要がある。

> （ウィトゲンシュタイン全集 4,p207）未来の数学者と今日の数学者を区別するであろうもの、それはまさに、より高度の繊細さである。そしてこの繊細さが数学をいわば刈り込むことになるであろう。なぜなら、ひとは将来新しいゲームの発見によりも、絶対的な明晰さに対して、いっそう気を使うようになるだろうから。
> 哲学的な明晰さは、数学の成長に対し、日光がじゃがいもの芽の成長に対するのと同じような影響をおよぼす。（日光の射さない地下室ではじゃがいもの芽は１メートルの長さにも達する。）

[1.5-2] 特定の言葉や概念を不動の基盤として議論を組み立てるわけにはいかない。たとえば

- 「不動の基盤」という言葉が基盤にできるわけではない。（自己言及に注意！）

[1.5-3] 言語ゲームの方法：「言葉の意味はその使用である。」

- しかし「使用」という言葉自身が特別扱いされているわけではない。
- しかし「使用」の意味を明確に定義しなくても使える。だいたいの定義が適切な定義である。

1.6 内部観測：不定性へ

[1.6-1] ウィトゲンシュタイン的明証性を生命科学に取り入れるとき内部観測論が始まる。

[1.6-2] 核心は「規則」（法則等々）という自然科学の基盤概念を問うことにある。

- 規則性は観察を整理するための概念装置（「統整原理」）でしかなく物自体を規定するものではない。（カント）

[1.6-3] ウィトゲンシュタインの逆理。

- 規則は使用と不可分だが、規則とその使用との結びつきの不定性は解消しえない。
- 「規則に機械的に従う」という言葉が失効する。

[1.6-4] 規則性を基底におかない数理モデルを作ることが必要となる。

[1.6-5] 「しかし、数学化すれば不定性は解消されてしまうからそれは無理だ。」

[1.6-6] ところが数学自身が不定性をもっていたのである。

1.7 数学自身のもつ不定性

[1.7-1] 数学自身にも「規則」概念などはない。

[1.7-2] 集合論が不定性を隠ぺいしてしまった。

[1.7-3] 不定性の源泉は、数学と我々との切断の恣意性にある。

[1.7-4] したがってどの数学的モデルも不定性を持つ。

1.8 例：自然数集合の不定性

[1.8-1] 自然数集合の確定性（とほぼ同値な数学的帰納法）とは現代数学の礎石である。

[1.8-2] 実無限と可能無限の区別が忘れられてしまった。

- ヒルベルトは実無限というナンセンスを避けるために形式主義を持ち込んだ。
- しかし、形式主義の基礎概念である証明可能性・無矛盾性自身が自然数概念を前提としている。

[1.8-3] 幾何学で、線と点とが対等であるように、区間 $[0,1]$ と $0 \le r \le 1$ なる実数とは対等な関係にある。

[1.8-4] ネルソンの可述的数学 (predicative mathematics) 構築の試み。数学的帰納法を制限すると無限自然数列がたくさん出てくる。

[1.8-5] 自然数が確定しなくなると、多くの数学が意味不定になる。

- 有限概念が多様になる。
- 実数概念が不定になる（無限数列の意味が不定になる）。

[1.8-6] 数学において「非明示的規則」なるものを表現する「写像」概念を問い直すことが先決となる。