きょうの予定

- 形式系（１階の述語論理）の復習
- 主要な結果
- Skolem の逆理

節の名前の前後に** が付く節は、素朴集合論を可とする「２０世紀数学」の中でのみ意味がある内容である。

目 次

2 Skolem の逆理

2.1 概要

形式系（１階の述語論理）で記述される数学的理論は無矛盾ならば可算モデルを持つ。これが Skolem-Lowenheim の定理と呼ばれる純数学的定理である。

集合論を（Zermelo-Fraenkel の公理系のような）形式系で記述するとき、集合論が無矛盾ならば、集合論の可算モデルがあることになる。これは、非可算集合の存在（という常識）と矛盾するように見えるので、Skolem の逆理と呼ばれることがある。

しかし、これは論理矛盾でなく、次のような、公理系の意味論についておもしろい現象であると考えられているだけである。

- その集合の全体のモデルでは、「集合」がそもそも少ししかないので「べき集合」も「外から見れば」濃度が上がらなくてもおかしくない。
- 「$\mathbf{N}$」 と 「$2^{\mathbf{N}}$ 」の間の全単射が、そのモデルの中での写像にはなっていない

この逆理は、集合論の公理的研究に素朴集合論を使う、という循環の持つよじれを示すものになっている。本来、実無限を扱う集合論は素朴には正当化しようがないために始まったと言うこともできる公理論的集合論を、素朴集合論で行うというのは転倒しているからである。（もちろん、公理論的集合論を純粋に数学的テーマとして研究することは意味があるが、この講義のテーマの文脈では意味がない。）

きょうは、形式系・モデルについて復習し、Skolem の定理の数学的内容と、それが示唆する集合論の問題点を吟味する。

2.2 １階の述語論理

１階の述語論理 (First order logic) は単純な記号形式でありながら、完成した後の数学的理論の記述法として豊かな表現力を持っている。それだけでなく、１階の述語論理は理想的意味論を持っていて、数学的理論としても豊かな内容を持っていて、哲学的なメッセージを持つ数学的事実が多く得られている。

１階の述語論理により数学的理論を記述するとはどういうことか、をまず述べる。

2.2.1 １階の言語 (first order language)

最初に、その理論で用いる定数記号・演算記号・関係記号を用意する。演算記号と関係記号はそれぞれ何変数の演算・何項関係かを示す自然数 *arity* を持つ。定数記号は arity 0 の演算記号と考える。

群論では、単位元を表す arity 0 の演算記号 e, 逆元を表す arity 1 の演算記号 i, 積を表す arity 2 の演算記号 $\times$、そして、等号を表す２項関係記号”=” からなる。

自然数論では、演算記号は $\{ 0, S, +, \times \}$、関係記号は $\{ = \}$. 0 は zero を表わす arity 0 の演算記号、S は次の数を対応させる操作を表す arity 1 の演算記号、$+$,$\times$ は各々加算・乗算を表す arity 2 の演算記号である。また”=” は等号を表す arity 2 の関係記号である。

集合論では、演算記号はなく、関係記号としては $\{ \in, = \}$ だけである。$\in$ は所属を表す２項関係記号である。

2.2.2 項 (term)

変数と呼ばれる文字を別に用意する。ふつう、$x, y, z, v, w, \cdots$ を用いる。

演算の適用の手順を示すものが**項**(term) である。項の表示の仕方は、見やすさと簡潔性とのトレードオフがあるが、適宜慣習的なものを流用する。2 項演算は概ね中置記法を用いる。たとえば、自然数論では $+(x, y)$ ではなく $x + y$ を用いる。

群論では、$x, y, xy, xx, yx, yy, x(xx), x(xy), x(yx), x(yy), \cdots$ が項の最初の方である。しかし、$x^2, x^3, x^{10^{10000}}$ は項ではない。x^2 は xx の省略形としては意味があるが、x^3 は結合律がない段階では $(xx)x$ か $x(xx)$ かの違いがあるので項の省略形として恣意性がある。

項についての一般的議論のときは、x^n などの記号が用いられるときもある。この場合の「一般的議論」が何か、ということも、この講義のテーマでは主要な問題となる。

自然数では、$0, x, y, S0, Sx, Sy, \cdots, 0{+}0, 0{+}x, x{+}0, x{+}x, x{+}y, y{+}x, y{+}y, \cdots, (0{+}0)\times 0, (x{+}y)\times(x{+}Sy), SS0, SSS0, \cdots$ といった項がある。$SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS0$ を $S^{22}0$ と略記することはあるが、22 という十進法の体系自身を持ち込むことは、この講義のテーマの下では、乱暴過ぎる。$\overbrace{SSS\cdots S}^{100}0$ を S^{100} と同一視することには問題があるのである。(10000 個の場合を考えよ。)

集合論では項は変数だけである。

2.2.3 論理式 (formula)

項はまだ名詞句に過ぎず何も主張していない。まとまった主張をするものが文であるが、ところどころ穴があいた（入試で見かける伏せ字のある）文に相当するものが、論理式 (formula) である。

原子論理式 (atomic formula)　は、関係記号の「スロット」に項を書き込んだものである。

群の場合には、$x = y, x(yz) = ((xx)x)x$ など。

自然数論の場合には、$So + So = SSo$ や $(x + y) \times (x + y) = (((x \times x) + (x \times y)) + (y \times x)) + (y \times y)$.

集合論の場合は、$x \in y, x \in x$ 等のタイプのみ。

複合論理式　原子論理式から、論理記号を用いて、複合論理式を作ることができる。既に構成された論理式 $P, Q, \cdots$ があるとき、次も論理式となる (x は変数)。なお、あいまいさ

が生じる場合には P, Q に括弧を付ける必要がある。

否定 (negation) $\neg P$

連言 (conjunction) $P \wedge Q$,

選言 (disjunction) $P \vee Q$,

含意 (implication) $P \Rightarrow Q$,

全称量化 (universal quantification) $\forall x P$, ($\forall x$ を universal quantifier)

存在量化 (existential quantification) $\exists x P$, ($\forall x$ を existential quantifier).

$\wedge, \vee, \Rightarrow$ は右結合的とする。すなわち、括弧を省いたときは、右から括弧を付ける、たとえば $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ は $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ のこと。

また、上の 6 個の記号は古典論理における論理的同値に関して言えば、冗長である。たとえば、$\Rightarrow, \neg, \forall x$ があればよい。

1. $P \vee Q \equiv \neg P \Rightarrow Q$,
2. $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$,
3. $\forall x P \equiv \neg \exists x \neg P$.

しかし、表現力や簡潔性が重要なので、すべて用いる。

群論での例としては、

- $\neg(x \neq e)$,
- $\exists y[xy = e]$,
- $\neg(x \neq e) \Rightarrow \exists y[xy = e]$,
- $\forall x(\neg(x \neq e)) \Rightarrow \exists y[xy = e]$.

変数の出現の性質 論理式内の変数の出現は、量化記号の出現に束縛されているか、自由であるかのいずれかである。束縛されているときは、それを束縛する量化記号の出現は唯一である。

$\neg(x \neq e) \Rightarrow \exists y[xy = e]$ の中で、y は 量化記号 $\exists y$ に束縛されている。x は 2 箇所に現れるが、そのいずれの**出現**(occurence) も**自由**(free) であるが、

$$\forall x(\neg(x \neq e) \Rightarrow \exists y[xy = e])$$

における x の 2 つの出現は量化記号 $\forall x$ に束縛されている。しかし、

$$(\forall x \neg(x \neq e)) \Rightarrow \exists y[xy = e]$$

では、x の最初の出現は $\forall x$ に束縛されているが、後の出現は自由である。

$$(\forall x \neg(x \neq e)) \Rightarrow \forall x \exists y[xy = e]$$

では、x の最初の出現は最初に出現する $\forall x$ に束縛されているが、後の出現は後に出現する $\forall x$ に束縛されている。

論理式内の変数の出現が**自由**である**束縛されている**、という概念は帰納法で定義する必要がある。(演習問題)

原子論理式内の変数の出現は自由である。

論理式 $\forall xP$ や $\exists xP$ において、文字列 P を quantifier $\forall x, \exists x$ の *scope* という。P 内の x の自由な出現は $\forall xP$ (と、それを含む論理式)内で quantifier $\forall x$ により**束縛される**(bound) という。

変数の出現は、全体で束縛されていないときは、自由であるという。変数の自由な出現を含まない論理式を**閉論理式**(closed formula, 別名, 文(sentence))という。

2.2.4 練習問題

1. 次の論理式の中の変数の各出現は束縛されているか自由か、を述べよ。束縛されている場合には、どの量化記号に束縛されているかを述べよ。

$$\forall x(x \in y \Rightarrow \exists x[x \in y])$$

$$\exists x((\forall xx = y) \Rightarrow So + y = x) \Rightarrow \forall x \exists z(x + z = y).$$

2. 自然数の言語で次を論理式で表せ。
   (a) x は y よりも小さい。
   (b) x は y を割り切る。
   (c) x は素数である。

3. 集合論の言語で次を論理式で表せ。
   (a) x は空集合である。
   (b) 空集合が存在する。
   (c) 空集合がただ一つ存在する。
   (d) x と y の要素を共に含む集合が存在する。

2.2.5 **１階の言語の解釈**

１階の言語の「意味」は、素朴集合論によって与えられる[1]。

ここで行うことは、素朴集合論に基づく数学の素朴な展開を分析し、形式的な部分を「１階の理論」という特別の方法で抽出したあとで、もともとの素朴な数学的構造を、その理論のモデルと考える、というように説明できる。

１階の言語 L があるとする。ある集合 X と、L の各演算記号 f (arity n) については演算

$$f^X : X^n \to X,$$

が与えられ、各関係記号 P (arity m) に対しては、写像

$$P^X : X^m \to 2 := \{ 0, 1 \}$$

が与えられたとする。このとき $\mathcal{X} = (X, \left\{ f^X \right\}, \left\{ P^X \right\})$ を L-構造という。

項の解釈　$\mathcal{X}$ を L-構造とすると、項 t と論理式も集合論的に解釈できる。

項については、出現する変数が「入力」となる写像が対応する。群の言語の場合であれば、項 $x(yx)$ は、写像 $X \times X \ni (a, b) \mapsto a(ba)$ に対応する。一般には項 t に現れる変数が $\{ x_1, \cdots, x_n \}$ で、変数に順序を $x_1 < x_2 < \cdot < x_n$ を指定するとき、$t^X : X^n \ni (a_1, \cdot, a_n) \mapsto t(a_1, \cdots, a_n) \in X$ が定義される。

論理式の解釈　たとえば、論理式 φ の自由変数が $\{ x, y, z \}$ のとき、$\varphi = \varphi(x, y, z)$ と表すとき、各 $(a, b, c) \in X$ に対し、$\varphi^X(a, b, c) \in \{ 0, 1 \}$ を帰納的に定めることができる。なお、φ の自由変数が $\{ x, y, z, w \}$ の一部のとき、$\varphi(a, b, c, d)$ と表す場合もある。これはルーズな表現だが便利であるので使う（正確には、$\varphi(a, b, c, d)$ は線形順序を持つ変数集合に依存した表現である。）

真理値集合 $\{ 0, 1 \}$ 上のブール代数の構造を使う。P, Q の自由変数が $\{ x, y, z \}$ に含まれていて、それぞれを $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ と表すとき、

1. $(\neg P)^X(a, b, c) = 1 - P^X(a, b, c)$,
2. $(P \wedge Q)^X(a, b, c) = \min \left\{ P^X(a, b, c), Q^X(a, b, c) \right\}$,
3. $(P \vee Q)^X(a, b, c) = \max \left\{ P^X(a, b, c), Q^X(a, b, c) \right\}$,
4. $(P \Rightarrow Q)(a, b, c) = \max \left\{ 1 - P^X(a, b, c), Q^X(a, b, c) \right\}$,

[1] この意味論の妥当性は、この講義では自明とは考えない。今回はこれは妥当と一旦考えて、その中で得られる Skolem の定理をとおして、意味論自身の妥当性を吟味しようとしているのである。

5. $(\forall x P)^X(b,c) = \min_{a\in X} P^X(a,b,c)$,
6. $(\exists x P)^X(b,c) = \max_{a\in X} P^X(a,b,c)$.

閉論理式 φ については、$\varphi^X \in \{0,1\}$ となる。$\varphi^X = 1$ のとき $\mathcal{X} \models \varphi$ と書き、**構造 $\mathcal{X}$ は　閉論理式 φ を満たす**, あるいは、φ **は構造 $\mathcal{X}$ で正しい（*valid*）**であるといい、

$$\mathcal{X} \models \varphi$$

と書く。

どの L-構造で正しい論理式 φ は恒真論理式（トートロジー,tautology）であるという。例としては次のものがある。P, Q, R は任意の閉論理式.

(A1) $P \Rightarrow Q \Rightarrow P$,

(A2) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$,

(A3) $\neg P \Rightarrow \neg Q \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$,

(A4) $(\forall x \varphi) \Rightarrow \varphi_x[t]$, ただし、項 t は φ 内の x の出現において自由であるとする。

(A5) $\forall x\ x = x$,

(A6) $\forall x \forall y\ (x = y\ \Rightarrow\ \varphi \Rightarrow \varphi_x[y])$, ただし、変数 y は φ 内の x の出現において自由であるとする。

項 t が**論理式 φ 内の x の自由な出現において自由**であるとは、t 内の変数の自由な出現は、$\varphi_x[t]$ においても自由なままであることをいう。

例　φ が $\forall x[x = Sy]$ を表すとき、この y に Sx を代入すると、Sx において x は自由であったのが、$\forall x[x = S(Sx)]$ においては $\forall x$ に束縛されてしまうので、Sx は $\forall x[x = Sy]$ における y の自由な出現について自由ではない。

閉論理式を**充足可能命題**(satisfiable) であるとは、ある L-構造で正しいことをいう。

否定 $\neg\varphi$ がトートロジーである閉論理式 φ を**恒偽命題**という。

2.3　１階の理論

１階の理論は、１階の言語 L と、公理と呼ばれる、閉論理式のリスト $Axiom$ によって与えられる。

なお、公理の中の論理式の最も外側の全称記号は省略する慣習がある。公理には、論理公理といって、どの１階の理論にも含まれるものと、固有公理 (nonlogical axioms) といって、その理論特有の公理とがある。意味論の文脈では論理公理は不用である。

2.3.1 群論の公理

群論は、１階の理論としては、次の公理系によって与えられる。

- $x(yz) = (xy)z$,
- $xe = x$,
- $x(ix) = e$.

これは、先に述べた慣習により

- $\forall x \forall y \forall z\ x(yz) = (xy)z$,
- $\forall x\ xe = x$,
- $\forall x\ x(ix) = e$.

の略記となっている。

2.3.2 自然数の公理

自然数に対しては、色々な１階の理論がある。誰でも受け入れざるを得ないものとしては、Robinson による理論 Q がある。

Q1 $Sx \neq 0$,

Q2 $Sx = Sy \Rightarrow x = y$,

Q3 $x + 0 = x$,

Q4 $x + Sy = S(x + y)$,

Q5 $x \cdot 0 = 0$,

Q6 $x \cdot Sy = x \cdot y + x$,

R $x \neq 0 \Rightarrow \exists y Sy = x$.

ここで, $+$ は $\cdot$ よりも結合が弱いという約束をしている。

2.3.3 集合論の公理

集合論は Zermelo-Fraenkel の公理がよく使われる。

(ZF-1) 外延性公理：要素が同じ集合は等しい。すなわち

$$x = y \Leftrightarrow \forall u\ (u \in x \Leftrightarrow u \in y).$$

(ZF-2) 集合形成公理 (既に存在する集合から新しい集合を形成する)

- (a) 内包性公理：任意の集合 a と、条件 P について x の部分集合 $\left\{ x \;\middle|\; x \in a \wedge P \right\}$ が存在する。
- (b) 対集合は存在する。
- (c) 和集合は存在する。
- (d) べき集合は存在する。

(ZF-3) 存在公理：

- (a) 空集合が存在する。
- (b) 無限集合が存在する。

(ZF-4) 正則性公理 (有基性公理)

(ZF-5) 選択公理

(ZF-6) 置換公理 (Fraenkel の公理)

演習問題 上の公理を論理式で表せ。

2.3.4 **１階の理論のモデル**

１階の理論 $\mathcal{T} = (L, Ax)$ のモデルとは、L 構造で、公理をすべて満たすものをいう。

群論のモデルは、普通の群そのものである。「通常の自然数」は自然数論のモデルである。また「素朴集合論」はＺＦ公理系のモデルである。

1 階の理論 $\mathcal{T}$ の閉論理式 φ が、どのモデルにおいても正しいとき、

1 階の理論 $\mathcal{T}$ のモデルが（同型を除いて）唯一のとき、**カテゴリカル**という。

2.4 **Skolem の定理**

定理 2.1 *1 階の理論 T がモデルをもつならば、可算モデルを持つ。*

証明. 証明は、素朴集合論による。$\mathcal{X}$ を T のモデルとする。変数を含まない項の全体を考える。これは可算集合 Ω である。

定数がない場合には一つ定数記号 c を付け加え、X の元 x_0 を任意に一つ選び、$c^X = x_0$ と置くと、これはやはり T のモデルになるので最初から定数記号があるとしてよい。

$\mathcal{X} \models t = s$ のとき $t \sim s$ と定めると、これは同値関係となる。その同値類集合を $Y := \Omega/\sim$ とする。この上に L-構造が定まる:f を arity 2 の関数記号、P を arity 2 の関係とするとき

$$f^Y([t],[s]) := [f^\Omega(t,s)],$$

$$P^Y([t],[s]) = 1 \overset{def}{\Longleftrightarrow} P^X(t^X, s^X) = 1.$$

上が well-defined であることは、$\mathcal{X} \models t = t'$ ならば $\mathcal{X} \models f(t,s) = f(t',s)$ より $f(t,s) \sim f(t',s)$ なることからわかる。

これがモデルとなることを言うには、公理がこの解釈で正しいことを言わなければならない。この中で、$\exists x P$ 型のものの処理が自明ではない。問題は、これに対して、$P_x^Y[t]$ を満たす項 t があるとは限らないことだ。

そこで、このような P ごとに、定数記号 c_P を用意し、言語を拡大し、公理 $P_x[c_P]$ を添加する。このとき、定数記号と公理の数は可算の範囲で留まる。

$P^X(d_P)$ となる $d_P \in X$ があるので、$c_P^X := d_P$ と定義する。このとき、新しい言語の項の全体はやはり可算である。

以上の操作を繰り返すと、可算なアルファベットを持つ 1 階の言語の増大列

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \cdots$$

と公理の増大列があり、これらはすべて $\mathcal{X}$ で解釈される。今、これらの合併として得られる言語を L とし、公理は上の合併とする。このとき、この言語の $\vdash \exists x\varphi$ という論理式は、ある L_i の論理式であるので、作り方から $\varphi_x[c]$ となる L_{i+1} の項 c が存在する。 ∎