3 第３回：形式主義

きょうの予定

- 自然演繹による証明
- ＺＦの公理系

目 次

3 第３回：形式主義 **1**

3.1 推論規則 1

3.1.1 「定理」の定義 3

3.1.2 証明の例 3

3.2 証明についての補足 4

3.2.1 省略記号 4

3.2.2 定義による関数記号の導入と定理保存拡大 4

3.3 ZF 公理系の論理式による表現 5

3.4 ふつうの集合論のＺＦでの表現 6

3.4.1 演習問題 7

しばらく、「記号操作」を基底とする形式主義の議論の仕方を学ぶことにしたい。＜集合＞のような「理念的対象」に比べて記号や記号の機械的操作にはあいまいさがないので数学の確実な基盤となる、というわけではない。実際には、何のために・どのように記号操作するか、という所が議論の核心となり、そこには絶対的基底があるわけではなく種々の＜理念＞が関与するので、「あいまいさ」は別のレベルで生き残る。

形式主義の意義は、議論の中で明確な部分を分離することによって、議論の孕む不定性・恣意性をより鮮明にすることができるところにある。（しかし、これは、知的作業の自明な普遍的方法に過ぎない、ということも言えるだろう。）

3.1 推論規則

以下の推論規則は自然演繹とよばれるタイプのものである。一般に、横線の上にならんだ論理式が定理ならば、下の論理式が定理であるという規則をあらわす[1]。

これらの推論規則は、自然数論だけでなく、多くの数学理論の形式化に共通に使われる普遍的なものである。なお、これらの規則は、括弧内に書いたような当たり前の推論を記号列の機械的変形規則として表現したものであるが、形式システムの下では、これらの機械的変形規則による変形自身を推論と考え、括弧内に書いたような意味は、発見論的にしか使ってはいけない。

命題論理の推論規則

$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \frac{P \wedge Q}{Q} \qquad \frac{P, Q}{P \wedge Q}$$

（$P \wedge Q$ が定理ならば P は定理等々、P と Q が定理ならば $P \wedge Q$ が定理）

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \frac{Q}{P \vee Q} \qquad \frac{P \vee Q \qquad \begin{array}{c}[P]\\ \vdots \\ R\end{array} \qquad \begin{array}{c}[Q]\\ \vdots \\ R\end{array}}{R}$$

$$\frac{P \Rightarrow Q, P}{Q} \qquad \frac{\begin{array}{c}[P]\\ \vdots \\ Q\end{array}}{P \Rightarrow Q}$$

（P ならば Q が定理で、仮定 P が定理ならば Q が定理である。また、P を仮定して Q が証明できれば、仮定から P を外して $P \Rightarrow Q$ が証明される。これらの推論の最も根源的な部分であるといえよう。）

$\neg$ の規則　$\neg P$ は $P \Rightarrow \perp$ と考えて $\Rightarrow$ の推論規則を適用するが、それ以外に排中律がある。

$$\frac{}{P \vee \neg P}$$

$\forall$ の規則

$$\frac{\forall x.P}{P_x[t]} \qquad \frac{P}{\forall x.P}$$

[1]一部は証明過程についての「大域的情報」が必要なので、この説明では不正確である。

（前半の t は項で、P 内の x の出現位置において自由であるとする。P がすべての x について成立てば、自由変数 x を具体的なもの t に置き換えた $P_x[t]$ も正しいという推論．後半の x は自由変数で仮定には現れないもの．ある仮定から P が示され、仮定には変数 x が現れていなければ P はすべての x について正しいという推論である。）

∃ の規則

$$\frac{P_x[t]}{\exists x.P} \qquad \frac{\exists x.P \qquad \begin{array}{c}[P_x[y]]\\ \vdots\\ Q\end{array}}{Q}$$

（前半の t は任意の数式、後半の変数 y は Q と他の仮定には現れてはいけない。）

等号の推論規則

$$\frac{}{x = x} \qquad \frac{t = s \quad P_x[t]}{P_x[s]}$$

（最後は、P の x に項 t を代入して定理であれば、x に t と等しい s を代入しても定理である、という推論。ただし、自由変数が偶然に束縛されないという条件が必要である。）次の推論規則は派生的に得られる。

$$\frac{x = y}{y = x}(\text{対称律}) \qquad \frac{x = y \quad y = z}{x = z}(\text{推移律})$$

たとえば、対称律は、$P(z) \equiv z = x$ について上の推論規則を適用すれば

$$\frac{x = y \qquad \dfrac{}{x = x}}{y = x}.$$

推移律は、$P(w) \equiv w = z$ に等式の推論規則を使うと

$$\frac{\dfrac{x = y}{y = x}\text{対称律} \qquad y = z}{x = z}.$$

3.1.1 「定理」の定義

図 1 のように推論規則を続けた適用したものを**証明図**という。論理式 P が、

- ある推論の下段とはなっていない
- $[P]$ のように鍵括弧では囲まれていない

ときに、証明図の**前提**である、という。また、最下部の論理式を**結論**という。$P_1, \cdots, P_n$ を前提として Q を結論とする証明図があるとき、前提 $P_1, \cdots, P_n$ の下で Q が**証明できる**といい、

$$P_1, \cdots, P_n \vdash Q$$

と書く。前提なしに証明できる論理式を**定理**と呼ぶ。

3.1.2 証明の例

次の証明図には前提がないので、$so + so = sso$ （インフォーマルには $1 + 1 = 2$）は定理となる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.\forall y.(x+sy)=s(x+y)}}{\forall y.(so+sy)=s(so+y)}}{so+so=s(so+o)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.(x+o=x)}}{so+o=so}}{so=so+o}\text{対称律} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x=x}}{\forall x.x=x}}{sso=sso}}{s(so+o)=sso}\,(P(z)\equiv sz=sso)}{so+so=sso}\text{推移律}$$

3.2 証明についての補足

3.2.1 省略記号

[3.2-1] $A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow A_3 \Leftrightarrow A_4$ は

$$A_1 \Leftrightarrow A_2 \ \wedge\ A_2 \Leftrightarrow A_3 \ \wedge\ A_3 \Leftrightarrow A_4$$

の略記。

[3.2-2] 自由変数 x のみの formula P に対し $\exists! xP$ は

$$\exists xP \ \wedge\ \forall x\, \forall y\ (\ P \ \wedge\ P_x[y] \ \Rightarrow\ x = y\ )$$

の略記。

3.2.2 定義による関数記号の導入と定理保存拡大

1 階の理論 $\mathcal{T} = (L, A)$ の論理式 D に対して

$$\vdash \forall x \exists! y D$$

が示されたときに、arity 1 の関数記号 f と論理式

$$(\Delta_D) \qquad f(x) = y \Leftrightarrow \varphi$$

を加えた1階の理論 $\mathcal{T}_D := (L \bigcup \{ f_\varphi \}, A \bigcup \{ \Delta_D \})$ は次を満たす。

[Cons-1] $\mathcal{T}_D$-論理式 φ に対して $\mathcal{T}_D$ 内でそれと論理同値な $\mathcal{T}$-論理式 φ' が構成できる：

$$\vdash_{\mathcal{T}_D} \ \varphi \Leftrightarrow \varphi'.$$

例えば

$$\vdash P(f(x)) \Leftrightarrow \exists u \ (\ P(u) \wedge D(x,u)).$$

[Cons-2] $\mathcal{T}$ の閉論理式 φ に対し、$\mathcal{T}$ の定理であることと、$\mathcal{T}'$ の論理式であることとは同値である。

関数記号 f を**論理式 D で定義される関数記号**という。また、$\mathcal{T}'$ は $\mathcal{T}$ の**定理保存拡大** *(Conservative extension)* という。

3.3 ZF 公理系の論理式による表現

$\exists x \in X \ P$ は $\exists x \ (x \in X \ \wedge \ P)$ の略。$\forall x \in X \ P$ は $\forall x \ (x \in X \ \Rightarrow \ P)$ の略。

(ZF-1) 外延性公理：要素が同じ集合は等しい。すなわち

$$x = y \Leftrightarrow \forall u \ (u \in x \Leftrightarrow u \in y).$$

(ZF-2) 集合形成公理 (既に存在する集合から新しい集合を形成する)

(a) 内包性公理：任意の集合 a と、条件 P について x の部分集合 $\left\{ x \ \middle| \ x \in a \wedge P \right\}$ が存在する：

$$\exists y \ \forall x \ (\ x \in y \Leftrightarrow x \in a \ \wedge P).$$

これより

$$\exists! y \ \forall x \ (\ x \in y \Leftrightarrow x \in a \ \wedge P \ ).$$

となるので、$\forall x \ (\ x \in y \Leftrightarrow x \in a \ \wedge P)$ の定数記号

$$\left\{ x \ \middle| \ x \in a \wedge P \right\}$$

が導入でき、その公理は

$$y = \left\{ x \ \middle| \ x \in a \wedge P \right\} \Leftrightarrow \forall x \ (\ x \in y \Leftrightarrow x \in a \ \wedge \ P \ ).$$

(b) 対集合は存在する。

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall u(u \in z \Leftrightarrow u = x\ \vee\ u = y\ ).$$

これにより arity 2 の関数記号 $\{\ x, y\ \}$ が定義される。

(c) 和集合は存在する。

$$\forall w\ \exists! z\ \forall y\ (\ y \in z \Leftrightarrow\ \exists x\ (\ y \in x\ \wedge\ x \in w\ )).$$

そこで、これを定義とする関数記号 $\bigcup w$ を導入する。

(d) べき集合は存在する。まず、新しい arity 2 の関係記号 $\subseteq$ を導入し、定義

$$x \subseteq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall u[u \in x \Rightarrow u \in y]$$

を公理に添加する。このとき

$$\exists z\ (\ \forall x\ (\ x \subseteq a \Leftrightarrow x\ \in\ z\ )\ )\ .$$

(ZF-3) 存在公理：

(a) 空集合が存在する。$\exists x\ \forall u\ (x \notin u)$. このとき

$$\vdash \exists! x\ \forall u\ (\ u \notin x\ ).$$

そこで論理式 $D :\equiv \forall u\ (\ u \notin x\ )$ とおくと $\exists! x D$ が定理なので、定数記号 $\emptyset$ で言語を拡張し、公理

$$y = \emptyset \Leftrightarrow \forall u\ (\ u \notin y\ )$$

を導入して定理保存拡大される。

(b) 無限集合が存在する。

$$\exists S(\emptyset \in S\ \wedge\ \forall x\ (\ x \in S\ \Rightarrow\ x \bigcup \{\ x\ \}\ \in\ S\ )).$$

(ZF-4) 正則性公理 (有基性公理) $\forall x \exists y \in x \Rightarrow \exists y(y \in x\ \wedge\ \neg \exists z(z \in x\ \wedge\ z \in y))$

(ZF-5) 選択公理

$$\emptyset \notin x \Rightarrow \exists f(\ f\ \text{は}\ x\ \text{から}\ \mathbf{pow}\ (x)\ \text{への写像}\ \wedge\ \forall z \in x(f(z) \in z)).$$

(ZF-6) 置換公理 (Fraenkel の公理)

$$(P(x, y, p) \wedge P(x, z, p) \Rightarrow y = z) \Rightarrow \forall X \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X(P(x, y, p))).$$

3.4 ふつうの集合論のＺＦでの表現

素朴集合論は、ＺＦの中で精密に表現される。

(3.4-1) 共通部分

$$\vdash \forall w \; \exists z \; \forall x \; (x \in z \Leftrightarrow \forall u \in w \; (\; u \in x \;))$$

となるので、arity 1 の関数記号 $\bigcap w$ を、公理

$$x \in \bigcap w \Leftrightarrow \forall u \in w \; (\; u \in x \;)$$

と共に導入できる。

(3.4-2) 順序対 $\langle x, y \rangle := \{ \; x, \{ \; x, y \; \} \; \}$.

(3.4-3) 直積集合 $x \times y$ は $z \in p \Leftrightarrow \exists u \in x \exists v \in y \; (\; \langle u, v \rangle = z)$ を満たす p として定められる。

(3.4-4) 写像：「z は x から y への写像である」を意味する論理式が定義できる。

$$z \subseteq x \times y \; \wedge \; \forall u \in x \; \exists! v \in y (\langle u, v \rangle \in z).$$

この３項関係を $z : x \to y$ と書く。また、$z : x \to y$ のとき、$\exists v (\langle u, v \rangle \in z \; \wedge P(v))$ という論理式を $P(z(u))$ と略記する。

(3.4-5) 集合族 $z : I \to \mathbf{pow} \; (x)$ に対し、直積 $\prod_{i \in I} z_i$ は次のような p として定義される：

$$f \in p \overset{def}{\Longleftrightarrow} f : I \to x \; \wedge \; \forall i \in I \; (\; f(i) \in z(i) \;).$$

3.4.1 演習問題

次の論理式をＺＦの中で表現せよ。

(問 3.4-1) p は x 上の順序関係である。

(問 3.4-2) p は x 上の同値関係である。

(問 3.4-3) y は集合 x 上の同値関係 z の同値類集合である。

(問 3.4-4) $f : x \to y$ は全射である。