4　第４回：＜無限＞の柔軟性 (1)：Forcing

きょうの予定

- ＺＦにおける自然数.
- ＺＦの加算モデル.
- Forcing の方法.

前回の訂正　任意の論理式 P について次の推論規則が必要：

$$\frac{\perp}{P}$$

目 次

「実無限」の持つ生命性（パラドクス）を制御しようとする公理論的集合論は、（ゲーデルの不完全性定理により）原理的に制御しきれない「実無限」を更に制御するためにい

ろいろな公理を案出して、「豊かな」で多様な＜無限世界＞を産みだしている。しかし、ヒルベルトが目を背けることができなかった「実無限」自身の深淵はそのまま残っていると思われる。

今回は、連続体仮説がＺＦ公理系とは独立であることを示すためにコーエンが案出した、強制法（forcing）の考え方を紹介する。強制法を用いることで色々なタイプの「存在しない不定な集合」を、集合の世界に付け加えることが可能となる。

強制法は、有限世界の中に自明に存在する可能無限性を実無限として形式化するときに発生する大きな恣意性を利用したものと言えよう。これは次回以降紹介する内的集合論と共通する点である。

なお、公理論的集合論の枠内での「強制法」の技術的側面は次の文献にかなり簡明に説明されている。[3,4] は概略を簡潔に説明している。

[1] K.Kunen, Set Theory, An introduction to Independence Proofs, North Holland, 1980. ISBN 0-444-85401-0.

[2] T.Jech, Set Theory, 2nd Edt. Springer 1997. ISBN 3-540-63048-1.

[3] T.Jech, Multiple forcing. Cambridge Univ Press 1986. ISBN 0-521-26659-9.

[4] S. Shelah, Proper Forcing. Lecture Notes in Math. 940. Springer 1980. ISBN 3-540-11593-5.

4.1 自然数の集合 ω

自然数の集合の理念化である set ω の扱いを見てみよう。

4.1.1 最小の帰納的集合

x が**帰納的**(inductive) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \emptyset \in x \ \wedge\ \forall y\ (y \in x \ \Rightarrow\ y^{+} \in x)$.

「自然数の集合」は

$$\omega := \bigcap \left\{ x \,\middle|\, x \text{ is inductive } \right\}.$$

と定義される。

4.1.2 整列順序と順序数

$\langle x, R\rangle$ が整列集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $R \subseteq x{\times}x \wedge R$ は順序関係 $\wedge$ $\forall z \subseteq x\ \exists w \in z\ \forall u \in z\ (\langle w, u\rangle \in R)$.

x が**順序数** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ x は推移的で、$\langle x, \in\rangle$ は整列集合。

x が順序数ならば $Sx := x \bigcup \{\ x\ \}$ も順序数。

$$x\text{ が}\textbf{自然数} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall y \in x\ (\ \exists z \in x\ (Sz = y)\ ).$$

$$\omega = \left\{\ x\ \middle|\ x\text{ は自然数}\ \right\}$$

とも記述できる。これが set になることが、無限公理によって保証される。

4.1.3 ω は何者か

公理から定まる集合 ω は「自然数全体の集合」と言われるが、その意味は何であろうか。

まず、メタレベルの数、$0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ などに対し、

$$\ulcorner 0\urcorner := \emptyset, \quad \ulcorner 1\urcorner := \{\ \ulcorner 0\urcorner\ \}, \quad \ulcorner 2\urcorner := \{\ \ulcorner 0\urcorner, \ulcorner 1\urcorner\ \}, \quad \ulcorner 3\urcorner := \{\ \ulcorner 0\urcorner, \ulcorner 1\urcorner, \ulcorner 2\urcorner\ \}$$

などの集合が定まり、これらについて

$$\ulcorner 0\urcorner \in \omega, \quad \ulcorner 1\urcorner \in \omega, \quad \ulcorner 2\urcorner \in \omega, \quad \ulcorner 3\urcorner \in \omega$$

などが示される。

この構成を続けて、「自然数 n について $\ulcorner n\urcorner$ という集合を帰納的に

$$\ulcorner n+1\urcorner := \{\ \ulcorner n\urcorner\ \} \bigcup \ulcorner n\urcorner$$

で定義される」と言いたいが、この操作は途中から「イデア」の世界に突入せざるを得なくなる。素朴な「帰納法」においては、数 n は何か、が不問とされているからだ。

$\ulcorner 1000\urcorner$ でも、constant $\emptyset$ だけで表示しようとすると 長さ 2^{1000} の文字列である項になる。もちろん、constants $\ulcorner i\urcorner (i = 1, 2, 3, 4, \cdots, 999)$ を導入すれば、$\ulcorner 1000\urcorner$ 程度ならば問題がないが、この方策では、記号 $\ulcorner 10^{1000}\urcorner$ は対処できない。つまり $\ulcorner 10^{1000}\urcorner$ に意義を与えるには、新しい情報圧縮の方策を考えなければならない。とくに「べき」の用法は不可欠となる。

自然数の set「ω」と「自然数」との間には

$$n \in \omega \;\Rightarrow\; n^{+} \in \omega$$

$$n \in \mathbf{N} \;\Rightarrow\; n+1 \in \mathbf{N}$$

の類似や、「数学的帰納法」の類似があるが、それほど自明な関係があるわけではない。

4.2 1階の言語ＺＦの解釈

ＺＦのモデル理論では素朴集合論を使うことはできない（それはゲームとして成立するがこの講義の立場では意味がない)。

そこで、ＺＦのモデル概念は、ＺＦの論理式をＺＦの論理式自身で解釈するものである。それは以下のように行う。

4.2.1 解釈

ZF-構造の台集合に相当するものを与えるのが、自由変数を一つ含む論理式 $\varphi(x)$ である。その「形式的外延」を $\left\{\, x \;\middle|\; \varphi(x) \,\right\}$ で表し、**クラス**と呼ぶ。ラッセルの逆理により、クラス $\left\{\, x \;\middle|\; x \notin x \,\right\}$ は集合ではない。クラス $\left\{\, x \;\middle|\; \varphi(x) \,\right\}$ が集合であるとは、

$$\vdash \exists y\, \forall x \;(\; x \in y \Leftrightarrow \varphi(x) \;).$$

次に、ZF-構造 $\mathbf{M}$ を使って論理式を解釈する部分は、論理式の**相対化**によって行う。これは、与えられた論理式の構成過程で、

- $\forall x \varphi$ は $\forall x \in \mathbf{M}\, \varphi$
- $\exists x \varphi$ は $\exists x \in \mathbf{M}\, \varphi$

に置き換えたもの。論理式 φ から上の方法で得られたもの $\varphi^{\mathbf{M}}$ を φ の**相対化**という。これは、素朴なモデル理論で、論理式 $\varphi(x,y,z)$ 等と構造 X について $\varphi^{X} : X^{3} \to \{\, 0, 1 \,\}$ を対応させたことを形式化したもの。

$\vdash \varphi^{\mathbf{M}}$ のとき、**論理式 φ は $\mathbf{M}$ で成り立つ** といい、$\mathbf{M} \models \varphi$ と書く。

4.2.2 推移的モデル

クラス $\mathbf{M}$ が**推移的**(transitive) であるとは $x \in \mathbf{M}$ ならば x の要素 y も $y \in \mathbf{M}$ を満たすことをいう。($x \in \mathbf{M} \Rightarrow x \subseteq \mathbf{M}$）．$\mathbf{M} = \left\{ x \;\middle|\; \varphi \right\}$ とすれば

$$\forall x \; (\; \varphi(x) \; \Rightarrow \; \forall y \in x \; (\; \varphi(y) \;) \;)$$

ということ。

補題 4.1 $\mathbf{M}$ が推移的クラスならば、外延性公理は $\mathbf{M}$ で成り立つ。

4.2.3 可算推移的モデルの存在 (Skolem の定理)

ZFC[1] の公理から有限個 $\phi_1, \cdots, \phi_n$ を選び固定する。このとき、推移的で可算な集合 M で、その上で $\phi_1, \cdots, \phi_n$ が正しいものが存在する。

4.3 Forcing

4.3.1 準備

$\mathbf{P} = (P, \preceq)$ を poset で最大元 $\mathbf{1}$ を持つとする。

[4.3-1] $D \subseteq P$ が *dense* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ どの $p \in P$ に対しても $d \preceq p$ となる $d \in D$ がある。

[4.3-2] $G \subseteq P$ が *filter* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (1) G は up closed (i.e. $G \ni a \preceq b$ ならば $b \in G$), (2) $p, q \in G$ ならば $r \preceq p$, $r \preceq q$ となる $r \in G$ がある。

[4.3-3] G が *generic set* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ G は filter で、どの dense subset $D \subseteq \mathbf{P}$ とも交わる。

4.3.2 典型的例

[4.3-4] 自然数の有限部分集合を定義域とし値域が $\{ \; 0, 1 \; \}$ である写像の全体を $\mathbf{P}$ とする。
$p \preceq q$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ p は q の拡大。

[4.3-5] dense subset の例としては、自然数 n に対して

$$D_n := \left\{ \; p \;\middle|\; p \text{ は } n \text{ で定義されている} \; \right\}$$

[1] C は選択公理

がある。これが dense なのは、どの $q \in \mathbf{P}$ についても $q \notin D_n$ のときは

$$q \ \succeq \ q \bigcup \{ \ \langle n, 0 \rangle \ \} \in D_n$$

よりわかる。

[4.3-6] 可算個の dense subsets については、そのいずれとも交わる filter は容易に作れる。($D_1, D_2, \cdots$ を dense sets とすれば、$p_1 \in D_1$, $p_1 \succeq p_2 \in D_2$, 等々とすると、$\{ \ p_1, p_2, p_3, \cdots \ \}$ がもとめる filter となる。)

[4.3-7] G の合併は自然数上で定義された写像 f を定める。

4.3.3 informal な見方

$\mathbf{P}$ の要素は（写像の）有限的断片で、$p \preceq q$ は断片 p が断片 q を拡大したものと考える。

subset $D \subseteq \mathbf{P}$ は、断片についての性質（たとえば「n で定義されている」という性質）を表す。性質 D が dense であることは、どの断片も性質 D を満たすように拡大できることを意味する。

filter は張りあわせ可能な断片の集まりである（断片 $p, q \in G$ に対し $r \preceq p$, $r \preceq q$ となる断片 r は p, q を共に拡大したもので、いわば p, q を張りあわせたものを含んでいる。）

generic set は、どの dense な性質についても、それを満たす断片を含む filter である。

4.3.4 generic set

命題 4.2 *generic set* G の定める写像 $f_G : \omega \rightarrow \{ \ 0, 1 \ \}$ はこれまで存在した写像のいずれとも異なる。

証明. $g : \omega \rightarrow \{ \ 0, 1 \ \}$ を任意の写像とする。

$$D_g := \left\{ \ p \in \mathbf{P} \ \middle| \ p(n) \neq g(n) \text{ となる自然数 } n \text{ がある } \right\}$$

とおくと、これは明らかに dense. 従って $G \bigcap D_g \neq \emptyset$. これは、$f_G = g$ ではあり得ないことを示す。実際、$p \in G \bigcap D_g$ とすると、$f_G(n) = p(n) \neq g(n)$ となるので $f_G \neq g$.

∎

4.3.5 generic set の存在

ZFC の公理の中から有限個を選び固定する（必要なものはすべて選んでおく）。M をそれらを満たす可算推移的モデルとする。

今までの議論を $\mathbf{P} \in M$ について行うと、dense subset は可算なので generic set G が存在することがわかる。しかも $G \notin M$ なので、M に集合 G を添加したモデル $M[G] \neq M$ を作ることができる。

$M[G]$ の構成は技術的には面倒である。超積 (ultra product) を使う方法が数学的には明確である。これは内的集合論でも使われる。

4.4 連続体仮説の否定がＺＦと矛盾しないこと

可算モデル M の中で、＜連続体よりも大きな濃度＞を持つ集合 X を用意する。$X \times \omega$ から $\{\, 0, 1 \,\}$ への部分関数で、定義域が有限のもの全体を $\mathbf{P}$ とし、以前と同様の順序関係を入れる。このとき、generic set を G とし、$f := \bigcup G$ とおくと、これは 写像 $f : X \times \omega \to \{\, 0, 1 \,\}$ を与える。しかも $f : X \to \{\, 0, 1 \,\}^{\omega}$ は単射であることが容易に示される。したがって、$\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ となる。（実際には、$M[G]$ において κ が潰れることがあるので、これで証明が終わるわけではない。）