きょうの予定

- Forcing としての Cantor の対角線論法
- 超積によるモデル構成
- internal set theory

目 次

4.5 **Forcing としての Cantor の対角線論法**

Forcing の議論を使うと Cantor の対角線論法を次のように表現できる。ω から $\{0, 1\}$ への可算個の写像 $f_1, f_2, \cdots$ を考える。$\mathbf{P}$ は §4.3.2 の通りとする。このとき、

$$E_i = \left\{ p \;\middle|\; p \not\preceq f_i \right\}$$

と定めると、E_i は dense である。可算個の dense set D_i, E_i のどれとも交わるフィルタ G が存在する。$\bigcup G$ をグラフとする写像 f_G はどの f_i とも異なる。

4.6 **初等的埋め込み**

$\mathcal{T} = (L, Ax)$ を１階の理論とし、M をモデルとする。$N \subseteq M$ が**初等的部分モデル**であるとは、関数記号 f については f^M の N への制限が f^N となること（従って、N 上での値は N にとること）と、論理式 φ と、$a_1, \cdots, a_n \in N$ にたいして

$$M \models \varphi(a_1, \cdots, a_n) \Leftrightarrow N \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$$

が成り立つことをいう。

4.7 **超積による初等的埋め込み**

I を無限集合とし、$\mathcal{U} \subsetneq \mathbf{pow}\ (I)$ を超フィルターとする。すなわち

[4.7-1] $S \supseteq T \in \mathcal{U}$ ならば $S \in \mathcal{U}$,

[4.7-2] $S, T \in \mathcal{U}$ ならば $S \bigcap T \in \mathcal{U}$,

[4.7-3] どの部分集合 $K \subseteq I$ についても、$K \in \mathcal{U}$ または $I \setminus K \in \mathcal{U}$.

M を $\mathcal{T}$ のモデルとする。このとき、写像空間 M^I に次のような同値関係を入れることができる：

$$f \sim_{\mathcal{U}} g \overset{def}{\iff} \left\{ i \;\middle|\; f(i) = g(i) \right\} \in \mathcal{U}.$$

(同値関係であることを確かめよ。)

このとき、商空間 ${}^*M := M^I / \sim_{\mathcal{U}}$ には次のように $\mathcal{T}$-構造を定義する：arity 2 の関数記号 b については

$$b^{{}^*M}([f], [g]) := [b(f, g)].$$

arity 2 の述語記号 P については

$${}^*M \models P([f], [g]) \overset{def}{\iff} \left\{ i \;\middle|\; M \models P(fi, gi) \right\} \in \mathcal{U}.$$

このとき、一般の論理式 φ で、自由変数がたとえば x, y のとき、

定理 4.1 *(Los の定理)*

$${}^*M \models \varphi^{{}^*M}([f], [g]) \Leftrightarrow \left\{ i \;\middle|\; M \models \varphi^M(fi, gi) \right\} \in \mathcal{U}.$$

定数の埋め込み $m \mapsto [\lambda i\ m]$ は初等的埋め込み $M \to {}^*M$ を与える。

M を自然数のモデルとすると、${}^*M$ は超準自然数のモデルとなる。また、M をＺＦのモデルとするとき、${}^*M$ はＺＦの超準モデルとなる。$M, {}^*M$ の対の持つ性質を公理的に取り出すことができる。

5　第５回：＜無限＞の柔軟性 (2)：internal set theory

Skolem の定理により、１階の述語論理で記述された自然数の理論に複数の同型ではないモデルがあることは、当初は数理論理学の有効性についての否定的な結果と思われいたのではないかと想像される。しかし、A. Robinson は 1960 年頃に、これを利用することで、無限大や無限小を明確な存在として扱うことが可能になることに気づき、超準解析 Nonstandard Analysis を創始した。これは 1977 に E. Nelson により 内的集合論 (Internal Set Theory) として数学のすべての分野で使える形式に整備された。以下この形式において、無限集合の不定性がどのように現れているかを調べたい。

内的集合論の言語はＺＦの言語に、arity 1 の述語 st を添加したものである。$st(x)$ はx **は標準的**(standard) であると読む。この述語を使わない論理式や項は**古典的**(classic) であるという。＜ふつうの＞数学の概念・対象は当然古典的である。

5.1　記号.

[5.1-1] $\forall^s x\varphi(x) \equiv \forall x[x$ が標準的 $\Rightarrow \varphi(x)]$(標準的な x はすべて φ を満たす。)

[5.1-2] $\forall^f x\varphi(x) \equiv \forall x[x$ は有限 $\Rightarrow \varphi(x)]$ (有限集合 x はすべて φ を満たす。)

[5.1-3] $\exists^s x\varphi(x) \equiv \exists x[x$ が標準的 $\wedge \varphi(x)]$ (φ を満たす標準的な x がある。)

[5.1-4] $\exists^f x\varphi(x) \equiv \forall x[x$ は有限 $\wedge \varphi(x)]$ (φ を満たす有限集合 x が存在する。)

これらを組み合わせて $\forall^{sf}, \exists^{sf}$ などを用いる。このとき、次が成り立つ。

[5.1-5] $\neg \forall^s x\ \varphi(x) \Leftrightarrow \exists^s x \neg \varphi(x)$,

[5.1-6] $\neg \exists^s x\ \varphi(x) \Leftrightarrow \forall^s x \neg \varphi(x)$.

5.2　内的集合論の公理:内包性公理の制限

ＺＦの公理の中で、内包公理は制限を受ける。内包公理が述語 st を含む非古典的性質に使えないことが超準数学を学ぶ上での最も大きな心理的な壁であると思われる。なぜならば、現代数学の土台である外延主義が部分的にくずれるからである。

[5.2-1] 内包公理:任意の集合 a と、**古典的**論理式 P について x の部分集合 $\left\{\ x\ \middle|\ x \in a \wedge P\ \right\}$ が存在する。

[5.2-2] 例：$P(x) \equiv x$ は標準的である は古典的でないので標準的な自然数全体のなす集合というものを考えることは許されない。

[5.2-3] **内包公理を制約する必要性**. 内包公理を非古典的条件についても成り立つとするとすぐに矛盾が生じる。

例. 標準的自然数の全体のなす集合 X があったとする。それは、空ではない。X の補集合は自然数の部分集合であるから最小元 x を持つ。このとき $x-1$ は標準的である。すると x は標準的な元 $x-1, 1$ の和となるので標準的となってしまう（これは転移公理**T** により示される)。したがって x は標準的かつ非標準的となり矛盾が導かれた。

5.3 理想化公理

I (理想化公理 **I**delization) 任意の**古典的な** 2 項関係 $R(x,y)$ に対して

$$\boxed{\forall^{sf}\ F\ \exists x\ \forall y\ \in\ F\ [\ R(x,y)\ ] \Leftrightarrow \exists x\ \forall^{s} y\ [\ R(x,y)\ ]}$$

つまり、どの標準的有限集合 $F \subseteq X$ についても、そのすべての元と R-関係にある要素 x がとれるならば, すべての、標準的な y と R-関係にある x がとれる。（コンパク性に近い）

注意

- R の定義域・値域は標準的である必要はない: $R\ \subseteq\ X\ \times\ Y$ で X,Y が古典的に与えられればよい。たとえば、$\left\{\ x\ \in\ \mathbf{R}\ \middle|\ x\ <\ \omega\ \right\}$ で ω が超準的であってもかまわない、なぜならば論理式 $x < \omega$ は古典的だからである。

[5.3-1] **非標準的自然数の存在.** 自然数についての 2 項関係 $R(x,y) \equiv x > y$ は、

$$\forall^{sf}\ F\ \exists x\ \forall y\ \in\ F[x > y]$$

を満たす, すなわち、自然数の任意の有限集合 F に対して、ある自然数 x が存在して、F のどの元よりも大きい。実際、F の最大の数に 1 を加えたものを x とすればよい。従って、**公理 I** より、$x > n$ がすべての標準的な自然数 n について成り立つような ω が存在することがわかる。この ω は標準的ではない。

このような ω は沢山ある。たとえば $\omega+2$,$\omega\times 2$,ω^2,.. はすべて同じ性質をもつ。

[5.3-2] **無限集合はすべて超準元を含む.** X を無限集合とする。$R(x,y)$ を古典的関係 $x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y$ とする。このとき

$$\forall^{sf} F\ \exists x\ \forall y\ \in F\ [\ x\ \neq\ y\ ]$$

は正しい、なぜならば、そうでなければ、有限で標準的な F が X と一致しまい、X が無限集合であることに矛盾する。よって**公理 I** により $x \neq y$ がすべての標準的な $y \in X$ に対して成り立つような x が存在する。

演習問題

[5.3-3] 理想化公理を用いて次を証明せよ。

(a) どの標準的な自然数でも割りきれる自然数が存在する.i.e.

$$\exists n\, \forall^s x\ [\ x \mid n\ ].$$

(b) どの標準的な自然数でも割りきれない自然数が存在する.

(c) どの標準的な正の実数よりも小さい正の実数が存在する.

[5.3-4] 次の集合はあるか？またあるとすれば標準的か？

(a) $\left\{\ x\ \middle|\ x^2 \text{ は標準的}\ \right\}$

(b) ω を非標準的自然数とするとき, $\left\{\ x \in \mathbf{N}\ \middle|\ x > \omega\ \right\}$.

[5.3-5] 次は正しいか？

(a) 標準的な集合の部分集合はすべて標準的である。

(b) 要素がすべて標準的な集合は有限集合に限る。

(c) 個数が標準的な有限集合であって、要素がすべて標準的とは限らないものがある。

[5.3-6] 写像 $f : \mathbf{N} \to \{\ 0, 1\ \}$ で $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が標準的} \\ 0 & x \text{ が非標準的} \end{cases}$ なるものは存在するか？

5.4　標準化公理

S (標準化公理　**S**tandarization) 任意の**古典的な**集合 E と任意の論理式 $P(x)$ について

$$\boxed{\exists^s A\ \subseteq\ E\, \forall^s x\ [\ x\ \in\ A \Leftrightarrow x \in E \land P(x)].}$$

内包性公理は、古典的論理式についてしか使用できないが、古典的でない論理式についての制限つき内包性公理は、標準的な対象だけを考える範囲では、成り立つ、という公理である。

[5.4-1] これにより、任意の述語 $P(x)$ と任意の標準的な集合 E から、次のような標準的な部分集合 $\boxed{{}^S\left\{\ x \in E\ \middle|\ P(x)\ \right\}}$ が存在することがわかる：

$$\forall^s x \in E\ [x \in {}^S\left\{\ x \in E\ \middle|\ P(x)\ \right\} \Leftrightarrow P(x)].$$

これを、P が間接的に定める部分集合という。

[5.4-2] 例：

(a) ${}^S\left\{ x \in \mathbf{N} \;\middle|\; x \text{ は標準的} \right\} = \mathbf{N}.$

(b) ${}^S\left\{ x \in \mathbf{N} \;\middle|\; x \text{ は標準的でない} \right\} = \emptyset.$

[5.4-3] **注意.** 上の例からわかるように $x \in E$ が標準的でない場合は次のいずれも実際に可能である。

(a) $x \in {}^S\left\{ x \in E \;\middle|\; P \right\}$ であるが $P(x)$ ではない。

(b) $x \notin {}^S\left\{ x \in E \;\middle|\; P \right\}$ であるが $P(x)$ である。

[5.4-4] **命題 (写像の間接的定義).** X, Y を標準的な集合とし、$R(x,y)$ は X の元と Y の元の間の関係であって

$$\forall^s x \in X \exists^s y \in Y \; [R(x,y)] \tag{7 − 1}$$

すなわち、X の任意の標準的な元に対して、Y の標準的な元がただ一つ R のもとで対応している（i.e. $R(x,y)$ が成り立つ）ようなものとする。このとき、

$$y = f(x) \Leftrightarrow R(x,y)$$

が任意の標準的な x, y について成り立つような標準的な写像 $f : X \to Y$ がただ一つ存在する。

[5.4-5] **例.**

(a) **非標準的な個数の数の和.** 標準的な実数列 $\boldsymbol{a} = (a_i)$ があるとする。すなわち、$\boldsymbol{a} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ は標準的な写像とする。このとき、各標準的な自然数 n に対して標準的な数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を対応させる対応を R とすると、これは上の定理の仮定を満たす。従って、標準的な写像 $S : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ で、標準的な自然数 n については

$$S(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

となるものがある。$S(n)$ を $\sum_{i=1}^{n} a_i$ と記す。従って非標準的な自然数 n についても $\sum_{i=1}^{n} a_i$ は意味をもつことになる。
注意. これは $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ と混同してはいけない。これは存在することもあればそうでないこともある。しかし、非標準的な自然数 ω に対して $\sum_{i=1}^{\omega} a_i$ はどのような数列 (a_i) についても確定するのである。この両者の関係の分析は、超順解析の解析学への応用の最初のステップの一つである。

(b) **非標準的な個数の数の積.** 同様に、$\prod_{i=1}^{n} a_i$ も意味をもつ。

(c) **操作の非標準的回数の繰り返し.** $f : X \to X$ を標準的な写像とするとき、標準的な自然数 n については f の n 回合成 f^n が定義される。従って、任意の自然数 n についても n 回合成 f^n が定義される。

(d) **非標準的区間での積分.** $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を標準的な積分可能関数とする。このとき、標準的な実数 a,b に対して、標準的な実数 $\int_a^b f(x)dx$ が対応するので任意の実数 a,b についても $\int_a^b f(x)dx$ が定まる。

[5.4-6] **古典的命題の相対化.** $R(x,y,z,w)$ を古典的な述語とするとき

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \exists w\ [\ R(x,y,z,w)\ ] \Leftrightarrow \forall^s x\ \exists^s y\ \forall^s z\ \exists^s w\ [R(x,y,z,w)]$$

が成り立つ。これは外側から転移公理を適用することで示される。この例で示されるように古典的述語から構成された閉じた命題（すなわち各自由変数を $\forall$ または $\exists$ で束縛した命題）は、$\forall\mapsto\forall^s$,$\exists\mapsto\exists^s$ と**すべて**置き直したものと論理同値である。

5.5 転移公理 Transfer

T ($F(x,y_1,\cdots,y_m)$ を**古典的な**述語とする、ただしその自由変数は $\{\ x,y_1,\cdots,y_m\ \}$ に含まれるとする。$a_1,\cdots,a_m$ が **標準的**であるとき

$$\boxed{\forall x\ F(\ x,a_1,\cdots,a_m\ ) \Leftrightarrow \forall^s x\ F(\ x,a_1,\cdots,a_m\ ).}$$

古典的な論理式については、標準的なものすべてに成り立てば、すべてについて成り立つ。つまり、論理式の真偽は標準的要素に限っても変わらない。

転移公理の帰結.

[5.5-1] **意味**. 古典的な条件が標準的な元について成立していることがわかれば、すべての元についても成立していることがわかる。

[5.5-2] **存在命題への適用**. $P(x)$ が古典的であり、パラメータがないとき、公理の帰結

$$\forall x\neg P(x)\Leftrightarrow\forall^s x\neg P(x)$$

と

$$\exists x\ P(x)\equiv\neg\forall x\ \neg p(x)$$

より

$$\exists x\ P(x)\Leftrightarrow\exists^s x\ P(x).$$

すなわち、古典的な条件を満たす元が存在すれば、必ずその条件を満たす標準的な元が存在することがわかる。

[5.5-3] **定理**. 標準的写像は標準的な元を標準的な元に移す.

証明. $f:X\to Y$ を標準的な写像とする。さらに $a\in X$ は標準的であるとする。このとき $\langle a,y\rangle\in f$ という論理式は古典的で、出現するパラメータ f,a は仮定より標準的なので、転移公理により

$$\exists^s y\in Y[\langle a,y\rangle\in f]\Leftrightarrow\exists y\in Y[\langle a,y\rangle\in f].$$

したがって、$y=f(a)$ のとき $y'=f(a)$ となる標準的な y' が存在するが f は写像なので $y=y'$ となる。 $\blacksquare$

演習問題

[5.5-4] 空でない標準的な集合は標準的な元を含むことを示せ。

[5.5-5] ω を非標準的な自然数とする。このとき、次の集合を求めよ

(a) ${}^S\left\{\, n \in \mathbf{N} \;\middle|\; n < \omega \,\right\}$,

(b) ${}^S\left\{\, n \in \mathbf{N} \;\middle|\; \omega < n < 2\omega \,\right\}$,

[5.5-6] ω を非標準的な自然数とし、$\epsilon := \frac{1}{\omega}$ とおく。このとき、次の集合は標準的か？

(a) $\left\{\, x \in \mathbf{Q} \;\middle|\; x < \epsilon \,\right\}$,

(b) ${}^S\left\{\, x \in \mathbf{Q} \;\middle|\; x < \epsilon \,\right\}$,

(c) $\left\{\, x \in \mathbf{Q} \;\middle|\; x \le 0 \,\right\}$.

[5.5-7] 非標準的な素数が存在することを示せ。

[5.5-8] 自然数の間の非古典的な２項関係 R を

$$R(x,y) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y = x & x \text{ が標準的であるとき} \\ y = x+1 & x \text{ が標準的でないとき} \end{cases}$$

と定める。この関係は間接的に写像を定めることを示し、その写像を求めよ。