きょうの予定　Nelson による、数学的帰納法を使わない数学の再構築の紹介の続き。

- Nelson の predicative arithmetic (2)

目 次

7 自然数列の不定性 (2)

7.1 復習

7.1.1 理論 Q_0

1階の理論 $(\{\ 0, S, P, \times, +\ \}, \{\ (3.1) - -(3.7))\ \}$ を Q_0 とする。公理はどれも存在記号をもたない。このような場合、理論は**開いている**(open) という。

3.1 Ax. $Sx \neq 0,$

3.2 Ax. $Sx = Sy \Rightarrow x = y,$

3.3 Ax. $x + 0 = x,$

3.4 Ax. $x + Sy = S(x + y),$

3.5 Ax. $x \cdot 0 = 0,$

3.6 Ax. $x \cdot Sy = x \cdot y + x,$

3.7 Ax. $Px = y \Leftrightarrow Sy = x\ \vee\ (\ x = 0\ \wedge\ y = 0\ ).$

7.1.2 拡大 Q_1

以下を公理として添加したものを Q_1 と書く。これも開いた理論であある

3.8 Ax. $(x\ +\ y\ )\ +\ z\ =\ x\ +\ (\ y\ +\ z\ ),$

3.9 Ax. $x \cdot (y\ +\ z\ )\ = x \cdot y\ +\ x \cdot z,$

3.10 Ax. $(x\ \cdot\ y\ )\ \cdot\ z\ =\ x\ \cdot\ (\ y\ \cdot\ z\ ),$

3.11 Ax. $x\ +\ y\ =\ y\ +\ z,$

3.12 Ax. $x\ \cdot\ y\ =\ y\ \cdot\ z.$

先週の資料で これらの公理が Q_0 の中で証明できる、と書いたが、数学的帰納法が 使えない Q_0 ではそれは間違いである。Predicative arithmetic ではこれらは、数の性質についての新しい要請となっている。精密化した双対化（次節）によって Q_1 を Q_0 の中に解釈できるが、これは、別の言い方をすると、 (3.8)-(3.12) を要請することにより、数の概念が変化することを意味する。

Q_1 に 述語記号 $\leq$ と、その定義を公理として添加したものを Q_1' と書いた。

7.2 帰納法の使用による数の概念の変化

7.2.1 開いた論理式

論理式が開いている (open) であるとは、量化記号を含まないことをいう。１階の理論 T' が T の**開いた拡大**(open extension) であるとは T に添加される論理式はすべて開いていることをいう。

7.2.2 帰納的論理式

x を自由変数として含む論理式 C について

$$ind_x C := C_x[0] \ \wedge\ \forall x(C \ \Rightarrow\ C_x[Sx])$$

と定義する。

$$\vdash ind_x C$$

であるとき C は x **について帰納的な**論理式という。

7.2.3 メタ定理 6.2: 開いた帰納的論理式による拡大

> T が Q_0 の開いた拡大とする。A が x について帰納的な T の開いた論理式であるとする。このとき、理論 $T[A]$ は T で解釈可能である。

ここで $T[A]$ は、T の言語に論理式 A を表現するのに使う記号を添加し、さらに A を公理として添加した理論を表す。これは、前回の A^3 により相対化すればよい。公理 B は開いているので B を相対化したものも当然証明できる。

7.2.4 開帰納法 (OI,Open Induction)

これは次の推論規則のことをいう。

> 論理式 A が開いていて x が出現するならば、$ind_x A$ から A が推論される。

7.2.5 メタ定理 6.3:開帰納法の使用を可能にする方法

> $\widetilde{Q_0}$ を Q_0 に開帰納法を推論規則として加えた理論とする。$B_1, \cdots, B_\lambda$ が $\widetilde{Q}_0$ の定理ならば $Q_0[B_1, \cdots, B_\lambda]$ は Q_0 に表現できる。

これにより、個々の帰納的開論理式に帰納法を適用しもよいことになるが、「してもよい」

のは自然数の概念に、それが使えるようにするだけの不定性が残っているからである。しかし、それが使えるようにすることにより、自然数の概念が変化してしまうことが、この講義の文脈では重要。

7.2.6 例

結合律 $(x+y)+z=x+(y+z)$ は $\forall x \forall y((x+y)+z=x+(y+z))$ について開帰納法を使えばよい。

7.2.7 メタ定理 6.4:「Q_1' は Q で表現可能」

公理 (3.8)–(3.12) は自然数の不定性によって実現可能な性質であることがわかる。これらにより自然数の概念は変化する。

7.3 理論 Q_2

Q_1' を以下のように拡大した理論を Q_2 と書く。

論理式が**明示的に有界**(manifestly bounded) とは、存在記号はすべて $\boxed{\exists x(x \leq a \ \wedge \ C)}$ という形で現れるものをいう、ただし、a は変数 x を含まない項とする。このとき、理論 Q_2 は、理論 Q_1' の、明示的に有界な論理式 A ごとに次の公理（MBI, Manifestly bounded induction) (明示的有界帰納法）を加えたもの。

MBI $A_z[0] \ \wedge \ \forall x(x \leq y \ \Rightarrow \ A_z[Sx]) \ \Rightarrow \ (x \leq y \ \Rightarrow \ A)$

ただし、変数 y は A に出現しないとする。

7.3.1 メタ定理 7.3

$B_1, \cdots, B_\lambda$ が Q_2 の定理ならば $Q_1'[B_1, \cdots, B_\lambda]$ は Q_1' に解釈可能である。

(Nelson p24) これより、MBI を用いてもよいことがわかるが、開帰納法の場合と同様に、用いるごとに数の概念が変化する。

7.3.2 有界帰納法 (BI,Bounded Induction)

理論 T の論理式 A が**有界**(bounded form) であるとは、A に出現する束縛変数を $x_1, \cdots, x_\nu$ とするとき、項 $a_1, \cdots, a_\nu$ で a_i は変数 x_i を含まないようなものがあり、

$$\vdash A \Leftrightarrow A'$$

となる、ただし、A' は、その構成途中で現れる $\exists x_i\ C$ を $\exists x_i(x_i \leq a_i\ \wedge\ C)$ に置き換えたものを表す。

> A が Q_2 の有界な論理式でであるとき
>
> **BI.** $ind_x\ A\ \Rightarrow A$
>
> は Q_2 の定理である。

U を Q_2 の拡大とする。aU の論理式 A が Q_2 **上で有界である**とは、A が Q_2 の有界な拡大 T の有界な論理式であることをいう。

ここで、理論 T が Q_2 **の有界な拡大である**とは、

- 述語記号 p の添加に伴う公理

  $$px_1 \cdots x_\nu \Leftrightarrow D$$

  の論理式 D が有界であり、
- 関数記号 f の添加に伴う公理

  $$fx_1 \cdots x_\nu = y \Leftrightarrow D$$

  について、論理式 $\exists y\ D$ が有界であることをいう。

7.3.3 メタ定理 8.1:有界最小数原理 (BLNP,Bounded Least Number Principle)

A を論理式とし、x, y, z を変数とする。u, v, w を x, y, z と異なり、また A には出現しない変数とする。このとき、次の論理式を $min_{x,y,z}A$ と表す。

$$A\ \wedge\ \neg\exists x\ \exists y\ \exists z(u \leq x\ \wedge v \leq y\ \wedge w \leq z\ \wedge$$
$$(u \neq x\ \vee\ v \neq y\ \vee\ w \neq z)\ \wedge\ A_{x,y,z}[u, v, w]).$$

> U を Q_2 の拡大とし、A を U の論理式で Q_2 上で有界であるとする。このとき
>
> **BLNP.** $\exists x_1 \cdots \exists_\nu A\ \Rightarrow\ \exists x_1 \cdots \exists_\nu \min_{x_1 \cdots x_\nu} A$
>
> は U の定理である。

7.4 どこまで議論の仕方が広がったか

以上で、Q_2 の有界拡大をしても Q の中で解釈できることがわかった。しかも BI(評価付き帰納法),BLNP(有界最小値原理) を使うことができる。ただし、それを使うごとに、数の概念が変化していくことに注意する必要がある。

7.4.1 練習問題

以下を有界帰納法と有界最小数原理を使って示せ。(節番号は Nelson の本を踏襲.)

9.1 Thm. $z_1 + y = z_2 + y \ \Rightarrow\ z_1 = z_2$.

9.2 Def. $x - y = z \Leftrightarrow z + y = x$ otherwise $z = 0$.

ここで、「P otherwise Q」 は $P \vee (\neg P\ \wedge\ Q)$ の略。

9.3 Thm. $y \neq 0\ \wedge\ z \cdot y = 0\ \Rightarrow\ z = 0$.

9.4 Thm. $y \neq 0\ \wedge\ z_1 \cdot y = z_2 \cdot y\ \Rightarrow\ z_1 = z_2$.

9.5 Thm. $y \neq 0\ \Rightarrow z \leq z \cdot y$.

9.6 Def. $x/y = z \Leftrightarrow z \cdot y = z\ \wedge\ y \neq 0$ otherwise $z = 0$.

9.7 Thm. $x \leq y\ \vee\ y \leq x$.

9.8 Thm. $x \leq y\ \wedge\ y \leq x\ \Rightarrow\ x = y$.

9.9 Def. $Max(x, y) = z \Leftrightarrow (x \leq y\ \wedge\ x = y)\ \vee\ (y \leq x\ \wedge\ z = x)$.

9.10 Def. $x < y \Leftrightarrow x \leq y\ \wedge\ x \neq y$.

9.11 Thm. $y \neq 0\ \wedge\ x = y \cdot q_1 + r_1\ \wedge\ r_1 < y\ \wedge\ x = y \cdot q_2 + r_2\ \wedge\ r_2 < y\ \wedge\ \Rightarrow\ q_1 = q_2\ \wedge\ r_1 = r_2$.

9.12 Thm. $y \neq 0\ \Rightarrow\ \exists q\, \exists r\ (x = y \cdot q + r\ \wedge r < y)$.

9.13 Def. $Qt(y, x) = q \Leftrightarrow \exists r\ (x = y \cdot q + r\ \wedge\ r < y)\ \vee\ (y = 0\ \wedge\ q = 0)$.

9.14 Def. $Rm(y, x) = r \Leftrightarrow \exists q\ (x = y \cdot q + r\ \wedge\ r < y)\ \vee\ (y = 0\ \wedge\ r = 0)$.

9.15 Def. $1 = S0$.

9.16 Def. $2 = S1$.

9.17 Def. $3 = S2$.

9.18 Def. $4 = S3$.

9.19 Def. $5 = S4$.

9.20 Def. $6 = S5$.

9.21 Def. $7 = S6$.

9.22 Def. $8 = S7$.

9.23 Def. $9 = S8$.

9.24 Def. $Dec(x, y) = x \cdot S9\ +\ y$.

9.25 Def. $x|y \Leftrightarrow \exists z\ x \cdot z = y$.

9.26 Thm. $x|y\ \wedge\ y \neq 0\ \Rightarrow\ x \leq y$.

9.27 Thm. $a = b + c\ \wedge\ x|a\ \wedge\ x|b\ \Rightarrow\ x|c$.

9.28 Def. p is a prime $\Leftrightarrow p \neq 1\ \wedge\ \forall x(x|p\ \Rightarrow\ x = 1\ \vee\ x = p)$.

9.29 Thm. p is a prime $\wedge\ p|a \cdot b\ \Rightarrow\ p|a\ \vee\ p|b$.