理学部数学科 2000 前期 計算数学１[1]

担当：辻下　徹[2]

きょうやること

- Knuth-Bendix の理論

訂正　p10–2

10.4.5　自由ブール代数

$\{\, a \,\}$ が生成する自由ブール代数は $0, 1, a, a'$ からなる。これは **pow** $\{\, x \,\}$ と同型で、$0 \leftrightarrow \emptyset$, $1 \leftrightarrow \{\, \emptyset, \{\, x \,\} \,\}$, $a \leftrightarrow \{\, \{\, x \,\} \,\}$ $a' \leftrightarrow \{\, \emptyset \,\}$ となる。

$\{\, a, b \,\}$ が生成する自由ブール代数は、**pow** $\{\, 1, 2 \,\}$ と同型で 2^4 の元から成る。$a \leftrightarrow \{\, 1, 12 \,\}$, $b = \{\, 2, 12 \,\}$. 一般に、有限集合 X の生成する自由ブール代数は、**pow pow** (X) と同型で 2^{2^n} の元から成る。

目 次

[1] URL:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html`
質問提出アドレス:`cs2000@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp`
[2] Email:`tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp`,
Homepage:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/`

プログラミング言語について 先週の（プログラミング言語の種類についての）質問 [Q10-7] への回答です。

1. アセンブリ言語 CASL
2. プロセス言語 Fortran, COBOL, C, Pascal
3. 関数型言語 C, Pascal, Lisp, ML
4. 論理型言語 Prolog
5. オブジェクト指向型言語 C++

---

11 Knuth-Bendix の理論（続き）

11.3 項書換

11.3.1 定義

$\Omega[X] \times \Omega[X]$ の元 (r, s) が **項書換規則** であるとは，r は変数ではなく，s の変数はすべて r に出現していることをいう．項書換規則のいくつかの集まりを **項書換系**という．

例:R_1 Ω は群論の作用素型とする．

$$\begin{array}{rcl} e.x & \to & x \\ ix.x & \to & e \\ (x.y).z & \to & x.(y.z) \end{array}$$

11.3.2 項書換規則による項の簡約化 (reduction)

項書換規則 $\alpha = (r, s)$ は $\Omega[X]$ の 2 項関係 $\to_\alpha$ を次のように定める：

$$u \to_\alpha v \overset{def}{\iff} u = t[x/r[\sigma]] \text{ かつ } v = t[x/s[\sigma]] \text{ となる項 } t \text{ と代入} \sigma : X \to \Omega[X] \text{ がある．}$$

$u = r[\sigma]$ となる代入 σ があるとき u は **α-redex である**といい，$v = s[\sigma]$ は u **の（α-）簡約化である**という．

R を 項書換系とするとき，

$$r \to_R s \overset{def}{\iff} r \to_\alpha s \quad \text{for } \exists \alpha \in R$$

と書く．

$(\Omega[X], \to_R)$ を **項書換系 R が定める有向グラフ**という．$r \overset{*}{\to}_R s$ であるとき，s を r の **簡約化**という．

11.3.3　代数的理論の項書換系による表現

項書換系 $\mathcal{R} = (\Omega, R)$ を代数的理論とみなしたものを $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ と書く．代数的理論 $\mathcal{T}$ に対して $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ が $\mathcal{T}$ と同値なとき，すなわち

$$\mathcal{T} \vdash s = t \Longleftrightarrow s \sim_{\mathcal{R}} t$$

であるとき，項書換系 $\mathcal{R}$ を，代数的理論 $\mathcal{T}$ の項書換系による実現という。

公理の等号を矢印に変えれば項書換系による実現を得るが、そのままで完備なもの（後述）となることは稀である。

11.3.4　単一化 (unification)

以下，項書換系 R が定める有向グラフが弱合流的であるための十分条件を与える．その条件は項の単一化の概念に基づいている．

定義.　項 s, t に対して　$s[\sigma] = t[\sigma]$ となる代入 σ をs, t **の unifier** という．この代入の結果をs, t **の unification** という．unification を持つ対 s, t は**unifiable** という．t に現れる変数を s に現れる変数以外のものに替えたもの t' が s と unifiable であるとき，t, s は**weakly unifiable** という．

定理 11.1　2つの項が *unifiable* であるとき，*unification* の中で擬順序

$$t \geq s \overset{def}{\Longleftrightarrow} t[\sigma] = s \text{ となる代入}\sigma\text{が存在する}$$

に関して最大なもの[3]が存在する。これを ***most general unification**(mgu)* という．

例 1　$t = (xy)z,\ s = u(vw)$ のとき，$(xy)(vw)$ は mgu であり，unifier は $\sigma : x, y, z, u, v, w \mapsto x, y, vw, xy, v, w$ である．

例 2　$(((x_1x_2)(x_3x_4))(x_5x_6)),\ ((x_7((x_8x_9)x_{10}))(x_{11}(x_{12}x_{13})))$ は unifiable.

例 3　$(((x_1x_2)(x_3x_4))(x_5x_5)),\ ((x_7((x_8x_9)x_{10}))(x_{11}(x_{12}x_{11})))$ は unifiable でない.

11.3.5　演習問題

A:定義からすぐ分かる、B:少し工夫が要る,C:やや難しい,D:難しい.　　t, u, v, w, x, y, z は変数とし，作用素記号は半群の理論のものとする．

問 $[11\text{-}1]_B$

(11-1-1) $x(xy)$ と $(uv)v$ は unifiable か？
(11-1-2) $x((zu)x)$ と $((v(yw))(y(vt))$ は unifiable か？

[3]擬順序集合　$(X, \geq)$ で $x \in X$ が最大であるとは，$x \geq y$ がすべての $y \in X$ について成り立つことをいう．

11.4 Knuth-Bendix の定理

11.4.1 競合対

2つの項書換規則 $\alpha : r \to s$ と $\beta : r' \to s'$ が**競合する**とは，どちらか一方 (α としよう）の redex r が他方の redex r' の部分項 r'_0 と弱単一化可能であることをいう．

このとき，r と r'_0 の最も一般な単一化 u が r'_0 へ代入 τ によって与えられるとすると，β-redex である $t := r'[\tau]$ には α-redex u が部分項として出現する．従って，t は $t \to_\alpha v$ と $t \to_\beta v'$ によって2通りに書換えられる．この対 (v, v') のことを **競合対**という．競合対がすべて収束するような項書換系を **完全である**という．

例. 項書換 R_1 で $(xy)z \to x(yz)$ は自分自身と競合する：実際 $(xy)z$ と部分項 xy とは単一化可能で $(xy)z$ が最も一般な単一化となっている: $(xy)z = xy[x/xy, y/z]$. 従って

$$((xy)z)w = (xy)z[x/xy, y/z, z/w] \to_\beta x(yz)[x/xy, y/z, z/w] = (xy)(zw)$$

$$((xy)z)w = uv[u/(xy)z, v/w] \to_\alpha uv[u/x(yz), v/w] = (x(yz))w$$

より，$((xy)(zw), (x(yz))w)$ が競合対となる．この競合対は $x(y(zw)))$ に収束する．

11.4.2 Knuth-Bendix の定理

定理 11.2 項書換系が下降鎖条件を満たしかつ完全であれば，それが定める簡約系は合流的である．

証明の概略：弱合流的であること：ある項が2通りの書換えを持つのは，ある項に2つの redex r, r' が出現する場合である．この2つの redex のあり方は3通りある：

- r, r' は交わりを持たない．
- r, r' は交わりを持つ（r' は r の部分項としてよい）ち
  - r' は項書換則の redex の具体化に使われる代入の部分項として出現する，あるいは
  - r, r' は競合する項書換則から由来する．

最初の2つの場合は2つの書換えは収束すること容易にがわかる．最後の場合が仮定により収束することがわかる．

11.4.3 Knuth-Bendix の方法 (完備化)

完全でない項書換系が収束しない競合対を持つとき，収束しない競合対を追加することを繰り返して完全なものにす る．

例 群論の書換系 R_1 は次のような完備化を持つ

$$\begin{array}{rcl} e.x & \to & x \\ ix.x & \to & e \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
(x.y).z & \to & x.(y.z) \\
ix.(x.y) & \to & y \\
x.e & \to & x \\
iiy & \to & y \\
i.e & \to & e \\
y.iy & \to & e \\
y.(iy.x) & \to & x \\
i(x.y) & \to & iy.ix
\end{array}
$$

11.4.4 演習問題

A:定義からすぐ分かる、B:少し工夫が要る,C:やや難しい,D:難しい

問 $[11\text{-}2]_A$ 次の項の対は弱単一化可能か？可能ならば最も一般の単一化を求めよ．ただし作用素型は群論のものとする．

(11-2-1) $((x(yz))w, x(yz))$,
(11-2-2) $((((x_1x_2)(x_3x_4))(x_5x_4)), ((x_7((x_8x_9)x_{10}))(x_7(x_{12}x_{13}))))$
(11-2-3) $(xi(yz), (uv)(zw))$,
(11-2-4) $(xx, u(vw)$,
(11-2-5) $(xx, u(uu)$.

問 $[11\text{-}3]_B$ 群論の完備化 R_1^* が本当に完備であることを確かめよ．

11.5 下降鎖条件を示すのに有効な方法

11.5.1 簡約擬順序

項集合 $\Omega[X]$ 上の擬順序関係 $\leq$ が**書換え順序**であるとは,

- t が s の部分項であるとき $t < s$,
- $t < s$ ならば任意の代入について $t[\sigma] < s[\sigma]$,
- $t < s$ ならば任意の項 u について $u[x/t] < u[x/s]$.

下降鎖条件を満たす書換え擬順序を**簡約化擬順序**という．**例** $t < s$ を t に現れる頂点の数が s に現れる頂点の数より小さいことと定義すると，明らかに書換え順序となる．これは明らかに下降鎖条件を満たすので簡約擬順序である．

11.5.2 項書換系の適合簡約擬順序

書換系 $\mathcal{R} = (\Omega, R)$ に対して，$(r, s) \in R$ ならば $r > s$ であるような簡約擬順序 $\leq$ を $\mathcal{R}$ の適合簡約擬順序という．

例:半群の作用素型 項 t の重み $w(t) \in \mathbf{N}$ を

- $x \in X$ に対して $w(x) = 1$,
- $w(t.s) = 2w(t) + w(s)$

により定める．これは明らかに簡約擬順序であり，結合書換え $(xy)z \to x(yz)$ に適合している．実際

$$w((xy)z) = 7 \ > \ w(x(yz)) = 5.$$

11.5.3 定理

適合簡約擬順序を持つ項書換系は下降鎖条件を満たす.

参考:定理 (Higman) $\leq$ を Ω 上の擬順序とする．これを用いて項集合に次のようにして擬順序を定めると，これは下降鎖条件を満たす:

- $\omega(s_1, \cdots, s_n n) > s_i \quad \forall i$,
- $\omega \geq \eta$ ならば $\omega(s_1, \cdots, s_n n) \geq \eta(s_{i_1}, \cdots, s_{i_k})$, ただし $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, k < n$.

第１０回の質疑

[**Q11-1-1**](22960018)$\vdash s = t \Leftrightarrow s$ と t の標準形が同じ、とテキストにありますが、項の標準形ってよくわからないのですが。

[**Q11-1-2**](22980011) Knuth-Bendix 理論のところで出てきた「標準形」とはどういうものですか?}

(質問理由：講義で一度聞いた気もするのですが、どうしても思い出すことができませんでした.)

[**A11-1**] 今日説明します。

[**Q11-2**](22970049)Knuth は Unix 関係でも名前を聞いたように思いますが、何か関係がありますか。

[**A11-2**] 同じ人です。

[**Q11-3**](22007805) 普段行っている問題の証明も同値関係のみで証明できるのでしょうか？

(質問理由：コンピューター内では証明は同値のみで引っ張っているように見えますが、実際ある問題を解くときもそのような手法が有効だとしたら、コンピューターに定理の証明をさせることも可能な気がしてくる。)

[**A11-3**] 何かが存在するという定理は、普遍代数の意味の定理とは異なります。また、定理とわかっていることをコンピュータに証明させることには余り意味はなく、問題は、定理かどうかわからない命題をコンピュータで証明させられないか、ということだと思います。しかし、自然数をどのように理論化しても、証明も反駁もできない命題があることが知られている（ゲーデルの不完全性定理）ので、当然、コンピュータで証明も反駁もできない。

[**Q11-4**](22980033) 代入律を示せて、特殊化律を示せないものはありますか？

(質問理由：代入律と特殊化律の違いがよくわかりません。)

[**A11-4**] $(xy)^3 = x^3y^3$ がわかっているとき $((a+b)(c+d))^3 = (a+b)^3(c+d)^3$ を出すのが特殊化律で、項 $w + uv$ の w に両辺を代入して $(xy)^3 + uv = x^3y^3 + uv$ を出すのが代入律です。

[**Q11-5**](ogawamari) 定理９．４の本質的にという意味がよくわかりません。

(質問理由：証明にはただ１つであると書いてあるし、私自身も１つであると思うのですが、「本質的に」と書いたのはなぜですか？)

[**A11-5**] 同型なものは皆、自由代数の役割を果たします。$\{ a, 2a, 3a, \cdots \}$ と $\{ a, a^2, a^3, \cdots \}$ はいずれも $\{ a \}$ から作られる自由半群と見なすことができますが明らかに「違う」ものです。しかし、同型な半群です。一般に数学での「唯一」はいつも、同型を除いて唯一、ということです。

[**Q11-6**](22970067) 10.4.3 の自由群の所で、$\left\{ a^n \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$ と $\left\{ b^n \;\middle|\; n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$ とが交互に現われる文字列で表示される、とありますが、その文字列は計算できるものなのですか。

(質問理由：最後の辺りで、$a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^2\ldots$ などをキャンセルして.. という語が聞こえましたが、計算してよいもの

なのですか？)

[**A11-6**] 「計算できるものなのですか」という表現は誤解を招きます。「自明でない変形をしてもいいのですか」というべきです。さて、自由群の場合、元の表示は唯一ではなく、自明な関係

$$(Wa^n)(a^mV) = Wa^{n+m}V$$

があります。もしも $n+m \neq 0$ ならば、さらに W の右端と V の左端とが「融合」します。

[**Q11-7**](25970398) 自由半群と自由モノイド、自由群の違いがよくわかりません。

(質問理由：演算はどれも和で定義しているのですか？また、積や逆の演算を定義すると、どうなるのでしょうか？)

[**A11-7**] 和とか積という言葉には惑わされないでください。結合的な２項演算が可換であるとき、それを、和として書くことが多いだけです。生成元が２個以上のときは、可換ではないので和と書くわけにはいきません。

自由半群と自由モノイドの違いは単位元があるかどうかの違いだけです。しかし、自由群の場合は「逆元」という操作がある分だけ、元は「倍に増えます」。

[**Q11-8**](22980002)λ 計算と代数的理論にはいかなる関係があるのでしょうか　プリントの作用素型〜代数的理論の流れを見ると

Ω 構造における演算	$\Leftrightarrow$	λ 式の縮約
$\sigma \models t = s$	$\Leftrightarrow$	$t\sigma \cong s\sigma$ $(\sigma, t, s : \lambda -$ 式$)$
$\mathcal{A} \models t = s$	$\Leftrightarrow$	$t \cong s$

また、今回のプリントを斜め読みすると

$$Knuth - Bendix \text{ の理論} \Leftrightarrow Church - Rosser \text{ の定理}$$

更に、Diamond-Lemma / 標準型定理等々の関連性が見られます。ただ、λ-式を Ω,X,A に分離する事は λ(作用素？) と変数の強固な結び付きを見る限り考えにくいので、λ-計算 $\in$ 代数的理論でないと思えますが。

[**A11-8**] 合流性の議論は歴史的には Church-Rosser の定理を原点としています。

λ 計算での λ-項の形成法 (M から $\lambda x.M$) において、述語論理での変数束縛と同様の様相があり、単純な構成法を持つ Ω-項との直接的比較は適切ではないように思います。λ-項については、Ω 構造に相当するものが長い間なく、λ-項の「意味」は、syntactic に（標準形を持つものは標準形によって）しか意味が与えられていませんでした (それ故 Church-Rosser が重要であった)。６０年代に Scott により「ドメイン理論」によって λ 項にも数学的意味付けがなされました。

[**Q11-9**](22970006) 有限集合 X の生成する自由ブール代数が **pow** $X \coprod X$ と同型であることはどのように示せますか。

[**A11-9**] 間違えました。**pow pow** X です。

$X = \{\, x_1, \cdots, x_n \,\}$ の元からブール式を作るとき、標準形として、literal と呼ばれる $x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ (積は $\wedge$,$\epsilon = \pm 1$, $x_i^{-1} = \neg x_i$) のいくつかの和 ($\vee$) として書ける。それぞれにリテラルは **pow** (X) の部分集合を定める。それにいくつかの集まりなので、ブール式は **pow** X の部分集合を定める。

[**Q11-10**](22980007) 同値関係以外の関係で、集合を分類することは数学的に意味がある場合がありますか

(質問理由： 集合を分類するとき、同値関係で分類される同値類というものによく出会います。なぜ、集合を分類するときは、いつも同値関係なのだろうと思いました。他の関係で分類することはできないのだろうか。)

[**A11-10**] 分類があるとき「x, y は同じクラスに属する」という２項関係 xRy があるが、これは同値関係となる。

[**Q11-11-1**](22980018) 語の問題は、代数的理論の定理判定問題の特殊な場合であるとのことですが、それはどのように特殊なのですか。

(質問理由：言語には文法というものがあるので、その点が特殊であるということですか。)

[**Q11-11-2**](22980050) 資料 p10-4 にある Knuth-Bendix の定理が使えない有名な決定不能問題である「語の問題 (word problem)」とは具体的にどのようなものですか？

[**A11-11**] 広い意味での「語の問題」(Word problem) は、書き換え規則と２つの文字列が与えられたとき、一方を他方に書き換えられるかどうかを判定せよ、という問題のことです。Turing 機械の停止問題は語の問題として表現できますので、「決定不能」（機械的には判定できないという意味）な語の問題があることになります。狭い意味では、有限表示される群が与えられたとき、２つの語が同じ元を表すかどうかを有限回の操作で決定する問題のことを言います。S. Novikov(1958) は２つの元で生成され、３２個の関係式を持つ群で、語の問題が解けない例を示した（Turing 機械の停止問題を、狭い語の問題に翻訳したもの）。もしも Knuth-Bendix の定理がいつも使えるならば、語の問題は解決してしまうことに注意。

[**Q11-12-1**](22980012) 10.4.4 自由束について。$\{ a, b, c \}$ が生成する自由束は無限集合となり、書き下すことは簡単でない、とありますが、どうしてそうなるのですか。

(質問理由：$[0, 1]$ の間の３つの値についての演算と考えると、そんなに難しいとは思えないのですが。「自由」代数となると難しくなってしまうのでしょうか。)

[**Q11-12-2**](22980018) なぜ $\{ a, b, c \}$ が生成する自由束は無限集合となるのですか。$\{ a \}$ や $\{ a, b \}$ のように考えると、15 個の元で書くことができるような気がしますが。

(質問理由：$\{ a \}$ や $\{ a, b \}$ の例のように考えると、$\{ a, b, c \}$ の自由束は

$$\{ 0, a, b, c, a \wedge b, a \vee b, b \wedge c, b \vee c, c \wedge a, c \vee a, a \wedge b \wedge c, a \vee b \vee c, a \vee b \wedge c, a \wedge b \vee c \}$$

と１５個で書くことができると思うのですが、よくわかりません。なぜ、無限集合となるのですか。)

[**A11-12**] $a \wedge (b \vee c)$ と $(a \wedge b) \vee c$ は違う元です。さらに、分配法則は成り立つとは限らないので、$a \wedge (b \vee c)$ と $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ も違う元になります（自由束は、特殊な束でしか成り立たない関係は、決して成り立たない、という性質を持つ束です)。こうして、いくらでも、異なる元を作れます。

２個の場合は、$a, b, a \wedge b, a \vee b$ のあとは、吸収律により、新しいものは作れません。

[**Q11-13**](22980030) $\Omega = \{ e, i, m \}$ の e, i, m の下に書いてある数字 $0, 1, 2$ がわかりません

[**A11-13**] その上の関数記号のアリティです。

[**Q11-14**](22980034) 第九回のプリントででてきた 9.3.2 推論規則で、公理 $\dfrac{}{s=t}$ の棒は何か意味がありますか。

(質問理由： 「第九回の質疑」の [Q10-18] で推論規則のことが載っていましたが、その上の公理 $\dfrac{}{s=t}$ の　は何か意味が（例えば E を集合とすれば $\overline{E}$ は閉包のように）ありますか。)

[**A11-14**] 棒は上下を区切る線です。線の上に条件を書くわけですが、線の上に何も書いてないということは、無条件に、線の下が成り立つということです。従って、線の下にある条件は公理となるわけです。

[**Q11-15**](22980034) 健全性定理、完全性定理の説明（証明）が抽象的でわかりにくかったです。

(質問理由： 具体的にどのようなとき（問題）にどのように使うかが見えてこなく、わかりにくかった。)

[**A11-15**] 数学の定理は、何かに利用するものだけでなく、理解を深める性質のものも重要です。これらの定理は、「証明」と「正しさ」の関係を理解するきっかけになる重要なものですが、人によってはそういう面には関心がないこともありますので、その場合には当面は気にしなくて結構だと思います。

[**Q11-16**](22970038) 離散数学の教科書を紹介して下さい

[**A11-16**] 資料 p2-1 に少し挙げ、最初の 3 冊が良書と思います。

[**Q11-17-1**](22980041) 10.4.3 で自由群は加法群と同型であるという記述がありましたが、代数の授業では加法群の別名として自由加群という別名を用いています。そもそも、「自由」という文字を使う由来は何かを教えてください。

[**Q11-17-2**](22990019) 代数 I でやっている群と同じようなものがありましたが違いはありますか？巡回群と自由半群とか。

[**Q11-17-3**](22990047) 自由半群 $\{ a, a^2, a^3, \cdots \}$ は巡回群 $\{ a^0, a, a^2, a^3, a^{n-1} \}$ と形が似ているのですが何か関係があるのですか。巡回群は n 個の元が巡回していて、巡回群という名前がついているのですが、自由半群の自由というのも何か意味があるのですか。

[**A11-17**] 加群は、群の公理に積の可換性を加えたものです。生成元が一つのときは一致しますが、自由加群は自由群とは違います。自由加群を加法群の別名として使うことはないので聞き間違えかも知れません。

「自由」は、生成元が自由である、という意味です。自由群の場合でいうと、生成元同士の間にある関係式は、すべての群でも成り立つものだけである、という性質です。ある群が自由でないのは、一般的には成り立たないのに、その群では成り立つような関係が生成元の間に存在しないことを意味します。

[**Q11-18**](22980047) モノイドとは何ですか？

(質問理由：モノイドという言葉の意味がわからなかったので、一部分がよく理解できませんでした。)

[**A11-18**] 単位元を持つ半群のことです。こういうことは講義中に質問する習慣が必要です。

[**Q11-19-1**](22980048) 最近の講義では、様々な代数の仕組みを一般化（?）しているようですが「その仕組みを理解することにより、離散数学における感覚を身に付けよう」ということなのでしょうか?

[**Q11-19-2**](22960115) このへんの範囲は代数学と似ていますが

(質問理由： 代数学を応用し計算機を使うことが今回のテーマなんですか。代数学はきらいです。)

[**A11-19**] 計算の本質は「書き換え」であり、複数の計算プロセスが独自に働いているときに結果がときによって違わないのはどういうときか、というような問題が、knuth-Bendix の理論で分析できます。

ところで、代数学のどういうところがきらいですか。

[**Q11-20-1**](22980035) 有向グラフが合流的ならば必ず弱合流的になりますか。

(質問理由：もしそうなるなら、弱合流的となるための条件は、合流的となるための条件をどのように弱くしたものですか。)

[**Q11-20-2**](22980050) 弱合流的の説明と、合流的の説明の違いがわかりません。

[**A11-20**] 仮定が違います。 $a{\to}b, a{\to}c$ か $a{\to}^*b, a{\to}^*c$ の違いです。きょう説明します。

[**Q11-21**](22980051) 最近授業がわからないんですけど。

(質問理由：３回前ぐらいからよくわからないのですが、やっぱり最初から復習するしかないのでしょうか。)

[**A11-21**] ３回前から復習すれば十分だと思います。どこがわからないかを明確にしてみてください。

[**Q11-22**](22990045) 公理とはどの様な基準で決められるものなのですか。

(質問理由：公理は証明によって得られるものでない以上、それは「正しい」から「ある」とは考えられないと思います。何かを定めないと議論そのものができないからでしょうか。それともそうしてつみ重ねた理論が現実的に役立っているからという結果論からでしょうか。)

[**A11-22**] （この講義で取り上げているような記号変形の意味での）証明可能性は「正しさ」とは関係がありません。正しさは「解釈」を導入して初めて意味を持ちます。

理論を現実に適用するときは、理論で用いられている用語の「解釈」をまず行います。用語の解釈によって公理は意味を持つことになりますが、それが正しいときに、初めて応用が出来ます。