理学部数学科 2000 前期 計算数学 1 [1]

担当：辻下　徹[2]

束 (lattice) は、多分野に出現する普遍性の高い数学的構造の一つである。束についての基本的な概念を以下学ぶことにする。

きょうやること

- 順序集合
- 完備束

目 次

12 束論 (1)

12.1 順序集合

12.1.1 順序関係の定義

集合 X 上の順序関係とは、２項関係 $x \preceq y$ で次の３条件を満たすもの：

(反射律) $x \preceq x.$

(推移律) $x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ ならば $x \preceq z.$

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html
質問提出アドレス:cs2000@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp
[2] Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

(反対称律) $x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ ならば $x = y$.

順序関係を与えた集合のことを順序集合 (partially ordered set 略して**poset**) という。

$a \preceq b$ または $b \preceq a$ のとき、a, b は**比較可能である**という。そうでないとき a, b は**比較できない**という。どの 2 元も比較可能であるとき、$\preceq$ は全順序 (total order, linear order) であるという。

a が b の**直前の元** であるとは $a \neq b$ であって $a \preceq c \preceq b$ かつ $a \neq c, b \neq c$ であるような c がないことをいう。このとき $a \lessdot b$ とかく。

有向グラフ $(V, \lessdot)$ を平面上に描くとき $a \lessdot b$ ならば a を b の下方に書くようにしたものを、順序関係 $(V, \preceq)$ の**Hasse 図**という。

12.1.2　順序集合の例

数の大小関係

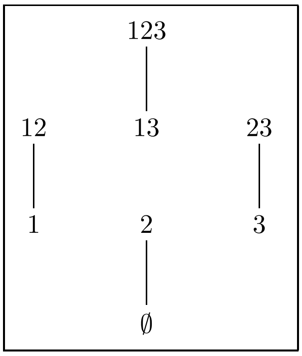
整除関係　自然数の整除関係は順序関係となっている。

演習問題 12.1 $V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$ として

$$a \preceq b \overset{def}{\iff} a \text{ は } b \text{ を割り切る}$$

と定義すると $\preceq$ は明らかに順序関係である。この $Hasse$ 図を描け。

べき集合　べき集合 **pow** (X) は包含関係により順序集合となる。$X = \{ 1, 2, 3 \}$ の場合の Hasse 図は右のようになる。ただし，例えば 12 は集合 $\{ 1, 2 \}$ を表す.



部分空間の集合　線形空間 V の部分線形空間の全体 $Sub(V)$ は包含関係で順序集合となる。

木　木グラフ (X, E) に対し $x \preceq y \overset{def}{\iff} x$ から y への道がある、と定義すると順序関係が得られる。

語の集合　アルファベット Σ 上の語の全体 Σ^* は、w が v の接頭語であるときに $w \sqsubseteq v$ と定義することにより順序集合となる。

語の集合は $w \to w.a$ $(w \in \Sigma^*, a \in \Sigma)$ という辺を持つグラフと考えると木となるが、上でのべた順序と一致する。また、$\Sigma = \{ 1 \}$ の場合には、自然数の上のふつうの大小関係と一致する。

12.1.3　最大と極大

$(X, \preceq)$ を順序集合とする。

- $m \in X$ が**最大元**(the greatest element) である $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in X\ [\ x \preceq m\ ].$
- $m \in X$ が**極大元**(a maximal element) である $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in X\ [\ m \preceq x \Rightarrow x = m].$

補題 12.1　*1.* 最大元は高々ひとつ.
2. 最大元は極大.

双対概念として、最小・極小が定義される。

最大元を $\top$(トップと呼ぶ)、最小元を $\bot$(ボトムと呼ぶ) と書く。(各々を $1, 0$ と書く文献も多い。) 最大元はどの元とも比較可能である。

注意　(i). 最大元が存在しない理由は２通りある。

- 極大元が２つある。
- 極大元すら存在しない。

(ii). 極大元が存在しないとするとその理由は、

- いくらでも大きな元がある。$\forall x \exists y [x \preceq y \wedge x \neq y]$.

12.1.4　上限・上界

定義　$A \subseteq X$ とする。

上界 (upper bound) u が A の上界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall a \in A [a \preceq u]$. どの要素も空集合の上界であると考えることができる。

上限 (supremum), 最小上界 least upper bouqqind) A の上界の中で最小のものがあれば、それを A の上限といい $\bigwedge A$ と書く。$\bigwedge \{\ a, b\ \}$ は $a \vee b$ と書く。$\bigwedge \emptyset$ は存在すれば最小元となる。

$\bigwedge A$ は次の性質により特徴付けられる：

(*) X の任意の元 x について $\boxed{\bigwedge A \preceq x \iff \forall a \in A [a \preceq x].}$

注意　(i). A に上界が存在しないということは、

$$\forall x \in X \exists a \in A [a \preceq x \text{ でない}].$$

$a \preceq x$ でないというのは２通りの場合がある

- a, x は比較できない,
- $x \prec a$.

(ii). A に上限が存在しないということは、

- 上界が存在しない
- 上界はあるが、上界の中に極小なものが２つ以上ある。
- 上界はあるが、上界の中に極小なものがない。

下界と下限 上界と上限の双対概念が下界と下限である。下限は $\bigvee A$, $a \wedge b$ と書く。

例：整除順序 自然数の集合に

$$n \preceq m \overset{def}{\iff} n|m(n \text{ は } m \text{ を割り切る})$$

という順序を入れる。このとき

- $n \vee m$ は n, m の最小公倍数.
- $n \wedge m$ は n, m の最大公約数.

例：べき集合 $(\mathbf{pow}\ (X), \subseteq)$ では

$$A \bigvee B = A \bigcup B \qquad A \bigvee B = A \bigcap B.$$

例：語の接頭関係 $(\Sigma^+, \sqsubseteq)$ では $w \bigvee v$ は共通の接頭語として存在するが $w \bigwedge v$ が存在するのは w, v の一方が他方の接頭語である場合だけである。

12.2　完備束

12.2.1　定義

部分集合はすべて上限と下限を持つような順序集合は**完備束**(complete lattice) と呼ばれる。部分集合がいつも上限をもつような順序集合を**完備上半束（complete suplattice）**という。

命題 12.2 完備上半束は完備である。

証明. 順序集合 $(X, \preceq)$ が完備上半束であるとする。A を任意の集合とするとき

$$\bigvee A = \bigwedge \left\{ x \;\middle|\; x \text{ は } A \text{ の下界} \right\}.$$

証終

すべての有限部分集合が上限と下限を持つような順序集合は**束**(lattice) と呼ばれる。

12.2.2　例

べき集合　べき集合 $(\mathbf{pow}\,(X), \subseteq)$ は順序集合となるが、これは完備束であり

$$\bigwedge \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \qquad \bigvee \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}.$$

この順序集合の部分集合 $\mathcal{Y}$ が**下半部分束**であるとは、$\bigvee$ の演算で閉じていること（ $A \subseteq \mathcal{Y}$ ならば、$\bigcap A \in \mathcal{Y}$ ）をいう。

命題 12.3 下半部分束 $\mathcal{Y}$ は完備で、

$$\bigvee A = \bigcap A \qquad \bigwedge A = \overline{\bigcup A}$$

ただし、

$$\overline{B} = \bigcap_{Y \in \mathcal{Y} \quad Y \supseteq B} Y.$$

開集合族　位相空間の開集合の全体は $\bigcup$ で閉じているので上半部分束である。従って完備となるが、下限 $\bigvee \mathcal{U}$ は交わり $\bigcap \mathcal{U}$ の開核となる。

同様に、閉集合族は $\bigcap$ で閉じているので下半部分束である。

部分線形空間の集合　線形空間 V の部分空間の集合 $Sub(V)$ は $\bigvee$ で閉じているので、完備束である。

整除関係　非負整数に整除関係を順序として入れたものは束である。最大元は 0 最小元は 1. これは下半束であり、従って完備束である。無限部分集合の上限は 0 である。

部分集合 $\left\{ n \;\middle|\; n \geq 2 \right\}$ の極小元は素数である。

第１１回の質疑

[**Q12-1-1**](22950030) 有限分岐木の頂点が無限であるとはどういうことなのでしょうか？

[**Q12-1-2**](22980013) 補題 11.4 の逆はいえないのですか？

(質問理由：有限分岐木であり無限長の長さ（の道）があるものは、頂点数が有限であるものはないのですか？)

[**A12-1**] 自然数全体を頂点とし、$n \rightarrow n+1$ を辺とすると、有限分岐木ですが、頂点が無限にあります。なお、無限長の道があれば頂点数はもちろん無限です。

[**Q12-2**](22950054) 教育実習のため３週連続で欠席したが単位取得は可能ですか？

[**A12-2**] （他の条件に依存しますが）可能です。

[**Q12-3-1**](22960115)「弱合流的」の由来

(質問理由：「強合流的」もあるのか)

[**Q12-3-2**](22970044) 弱合流と合流の違いは何ですか。

(質問理由：どのような意味で『弱』とついているのか。合流とのちがいは何なのか、よくわかりません。)

[**A12-3**] A $(a \rightarrow b, a \rightarrow c)$ ならば $A'(a \overset{*}{\rightarrow} b, a \overset{*}{\rightarrow} c)$ とします。このとき、$A' \rightarrow B$ ならば $A \rightarrow B$ です。従って $A \rightarrow B$（弱合流性）の方が弱い条件です。

[**Q12-4**](22960115)「合流的」は何に応用されるのですか

[**A12-4**] 標準形に使われます。

[**Q12-5**](22970002) 項書換規則のところの代入律というので

$$((xy)z)w = (x(yz))w$$

とやってのですが、これは

$$((xy)z)w = x(y(z(w)))$$

となったりはしないのでしょうか。

[**A12-5**] 一度にはなりませんが、何回か代入律を使うとなります。

[**Q12-6**](22970010) 有限性条件から $a \rightarrow a$ ないのなら $a \preceq a$ を満たさないのではないですか？

[**A12-6**] 推移律と反対称律を満たす関係 R があるとき、$R \bigcup \Delta$ は順序関係になります。

[**Q12-7**](22970023,22970398) 項書換規則で　r は変数ではなく、s の変数はすべて r に**出現している**という意味がよくわかりません。

[**A12-7**] たとえば $r = m(x,x) \to m(x, m(y,y))$ の場合 s の変数 y は r には出現していません。

[**Q12-8**](22970049) 完備化によってどのような利点があるのでしょうか

(質問理由：距離空間の完備性とかに比べて「よさそう」というイメージがわきません。)

[**A12-8**] 完備な書き換え系では、同値問題が標準系の方法で解決できます。距離空間の完備性とはほとんど関係がありません。

[**Q12-9**](22970064) 競合対が収束するとはどういうことですか？

[**A12-9**] 今日説明します。

[**Q12-10**](22980002)Diamond Lemma で、閉路が存在した時でも、閉路から抜け出す書換規則があれば、正規型へ持ち込めるのではないでしょうか

[**A12-10**] その通りですが、「サイクル（閉路）から抜け出せる」という条件は、大域的な情報を必要とするため、「実効的」な条件に直さないと使えないと思われます。$xy \to yx$ のようなサイクルがあるときは、別の扱い方をする。

[**Q12-11**](22980007) 弱合流であることと、ある関数が単射ではない、ということが良く似ている感じがします。関係はありますか？

(質問理由：「弱合流」と「単射」とは考えている場所があきらかに異なるのですが、どうも似通っています。)

[**A12-11**] どのへんが似ているとかんじますか。$f(x) = f(y) \wedge x \neq y$ となる x, y が存在することが「単射でない」を意味しますが、弱合流の条件とは余り似ていないと思います。

[**Q12-12**](22980011) 弱単一化可能なものと、単一化可能なものを単一化したとき、どのような違いが出てくるのか？

(質問理由：単一化の部分の定義をみてもいまいち理解できなかったので)

[**A12-12**] 今日の講義を参照。

[**Q12-13**](22970091)Knuth-Bendix の理論などは実際のプログラミング言語でどの様に使われているのですか。

[**A12-13**] 代数型計算言語の個々のプログラムは項書換規則で与えられる。計算は与えられた項を、その規則で書き換えることになる。計算結果が中途の操作の順番に依存しないことを保障するのが、規則の合流性である。

[**Q12-14**](22980012)Knuth-Bendix 理論とは、「ある状態の収束先がどうであるか安定しているのか等を探る方法と思ったのですが、そうみなして良いのですか

[**A12-14**] 「収束先がどうであるか安定している」という表現はあいまいですが、「どのように書き換えてても収束先が同じである」という意味だと解釈すると、そうです。

[**Q12-15**](22980018) 11.4 の例で $(xy)z$ と部分項 xy とは単一化可能で $(xy)z = xy[x/xy, y/z]$ とありますが、なぜこうなるのかがよくわかりません。また、$((xy)z)w$ をこのとおり当てはめると

$$((xy)z)w = (xy)z[xy/(xy)z, z/w]$$

となるのではないかと思うのですが...

[**A12-15**] きょう説明します。なお $[xy/(xy)z, z/w]$ は代入ではありません。

[**Q12-16**](22980030) 分配法則が成り立つ、成り立たないという証明はどうしたらよいのでしょうか？
(質問理由：分配法則が成り立つ、成り立たないというのは「定義」であって証明すべきものではないのですか？

$$(a \vee b) \wedge c \neq (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

は何故なのでしょうか？)

[**A12-16**] 分配法則が成り立たない束、すなわち、$(a \vee b) \wedge c \neq (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ を満たすような元 a, b, c を持つ束の例が作れます。自由束では、一般には成立しない関係式は成立しませんので、自由束で $(a \vee b) \wedge c \neq (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ となることがわかります。（これは可換性を満たさない群がある、というのと同じことです。）

[**Q12-17**](22980031) 群論の完備化があるなら、環論・体論の完備化というものもあるのですか

[**A12-17**] 体論は普遍代数では扱えません。環論は可換性があるためサイクルがあって直接 Knuth-Bendix の定理は使えません。

[**Q12-18**](22980034)Diamond Lemma の証明について $a \xrightarrow{*} b$, multiset などの記号や言葉がわかりません

[**A12-18**] 共に講義で説明しました。$a \xrightarrow{*} b$ は a から b への道があること。

[**Q12-19**](22980019) 金曜４限のパソコンの授業は出られませんが、どのようなことをしているのですか？

(質問理由：みなさんは授業内容をきちんと理解できているのでしょうか？僕は最近あいまいな所が多いです。)

[**A12-19**] ５月で Mathematica の基本的な使い方の説明が終わりましたので、その後は金曜４限は自習にしています*(実際には５月の段階で数名しか参加していない。)

[**Q12-20**](22007806) 順序関係を表す"$\leq$" は数の大小を表す"$\leq$" が順序関係となることからそのまま用いられているのですか。他の記号を用いることはないのですか

(質問理由：同じ記号だとまぎらわしく感じるのですが。)

[**A12-20**] 他の記号 ($\preceq$ など）も使われます。自然数に他の順序関係を導入するようなときは混乱しますので、別の記号をつかわなければなりませんが、文脈が違って混同の怖れがないときは、しばしば、$\leq$ を使います。