

理学部数学科 2000 前期 計算数学 1¹担当：辻下 徹²

今日の予定

- 束
- レポート問題の割当
- 講義アンケート

9月の予定：9.8,22,29

1 レポート問題

次の中から2題以上と取り組み、報告せよ。

- 講義資料にある練習問題。
- Mathematica 自習資料にある演習問題。

期限：9月8日（金曜日）講義終了時

- 注意事項
- 易しすぎるものを選択した場合は再提出を指示する。
 - 内容的に同一と推測される報告が複数あった場合には口頭試験を行う。

講義資料からの問題例

- 1 p4-6 5つのグラフ（頂点数30以上、橋のないもの）を書き、一方通行化のアルゴリズムを、に適用してみよ。
- 2 §5.2 力学系のグラフを描け。（ τ を色々変えよ。）
- 3 §5.2 $p = 23, 29, 31$ など大きな対する $1/p$ の循環小数のグラフを書け。
- 4 §5.2 Collatz の問題について考察せよ（計算機実験などでもよい）。
- 5 §5.4 状態数が4,5,6の有限力学系を数え上げよ（同型なものは同一視する）。
- 6 §6.7 $|Q| = 3, |\Sigma| = 2$ のオートマトンを数え上げよ。ただし、同型なものは同じとみなす。（ヒント：約80個ある）

¹URL:<http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html>
質問提出アドレス:cs2000@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

²Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:<http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/>

- [7] §6.7 10 進法の 2 数を加えるオートマトンを設計せよ。
- [8] §6.7 2 進法の 2 数を掛ける有限オートマトンを作れるかどうかを考察せよ。
- [9] §6.7(p5-10) Tsetlin automaton の挙動を解説せよ。
- [10] §6.3.2(p6-4) $1, 0, \bullet$ という文字を含む文字集合上の書換システムで、次のようなものを作れ。

$$\bullet w \bullet \rightarrow^* u$$

ただし、 u は w から 0 を省いたもの。

- [11] §6.7 問題 (6-1)
- [12] §6.7 問題 (6-2)
- [13] §7.9 自分で長さ 10 以上の項を 5 つ考え、それについて問題 (7-3) を解け。
- [14] §8.9 演習問題 (8-1)(8-2)(8-3)(8-4)
- [15] §9.1.4 問 [9-1] で、 c, u, b の解釈を自分で与えて問題を解け。
- [16] §9.3.8 演習問題 (p9-10), 問 [9-5],[9-6]
- [17] §9.3.8 演習問題 (p9-10), 問 [9-7],[9-8]
- [18] §10.4.3 自由群についての演習問題 (p10-2)
- [19] §10.4.5(p11-1 で訂正) に記述されているブール代数が自由であることを説明せよ。
- [20] §10.5 問題 (10-1), 問題 (10-2)
- [21] §11.2 Diamond Lemma の証明を (講義での修正を加え) 書け
- [22] §11.3.5 演習問題 (unification)
- [23] §11.4.4 演習問題 [11-2]
- [24] §11.4.4 演習問題 [11-3]
- [25] §12.1 演習問題

その他の問題

[B-1] やきもちやきの 3 亭主

旅の途上にある 3 組の夫婦がとある川辺にやってきたが、2 人乗りの舟しか見あたらない。どの亭主も異常な程やきもちやきで、自分の居ない所で細君が他の亭主と一緒にいることが我慢できない。3 組とも対岸に渡って一緒に旅を続けることができるであろうか?(舟が岸に着いたとき、その岸に居る人は舟に乗っている人とも同じ所にいると考える。)

[B-2] 水差しパズル

容量がそれぞれ $8, 5, 3$ dl の水差し A, B, C がある。水差し A にはワインが満たされている。このワインを 2 等分するにはどうしたらよいだろうか。ただし、この 3 つの水差し以外、どんな計量器も使えない。

[B-3] 水差しパズルで、 A, B, C の容量を変えたときはどうなるか？

[B-4] §1.3.2 宣教師と首刈族が 4 人ずつの場合はどうなるか？

質問

[Q13-1]₍₂₂₉₅₀₀₃₅₎ 束という名前の由来は？

[A13-1] 部分集合と、その上界・下界との関係を描くと束のようになっている。

[Q13-2]₍₂₂₉₇₀₀₀₂₎ 群論の書き換え系以外では別の完備化になるか

[A13-2] もちろん。

[Q13-3]₍₂₂₉₇₀₀₁₀₎ 弱合流性と合流性の違いがわからない

[A13-3] [A12-3] を見てください。

[Q13-4]₍₂₂₉₇₀₀₂₃₎ 「アルファベット Σ 上の語の全体 Σ^* は、 w が v の接頭語であるときに $w \sqsubseteq v$ と定義することにより順序集合となる。」 \sqsubseteq の意味がわからない。

[A13-4] この定義が意味を与えています。それ以外には何も意味はありません。

[Q13-5]₍₂₂₉₇₀₀₃₇₎ 群の必要性がわからない

[A13-5] 丁度、幾何学で球面を良い例としてよく扱うのと同じで、普遍代数では群論自身が良い「例」となっています。

[Q13-6]₍₂₂₉₇₀₀₄₁₎ u が A の上限のとき、 $u \ni A$ でなければならないか

[A13-6] そういうことはありません。最大値があるときは勿論上限になります。

[Q13-7]₍₂₂₉₇₀₀₄₄₎ 距離空間の完備性と、束の完備性の関係は？

[A13-7] 論理的には、言葉が同じという関係だけです。しかし「心理的には」、なんらかの極限操作（距離空間の場合は点列の極限をとる操作、束の場合は上限をとる操作）をしても外に出ない、という点で共通しています。

[Q13-8]⁽²²⁹⁷⁰⁰⁴⁹⁾ 束には最小元がなければならないか

(質問理由：整数の集合は束にならないので不便ではないですか)

[A13-8] 最小元や最大元がないという理由だけで束でない場合には、それを人工的に添加すれば済みます。

[Q13-9]⁽²²⁹⁷⁰³⁹⁸⁾ 最大元と極大元の違いがわからない

[A13-9] $\{a, b, c\}$ に順序 $a \leq b, a \leq c$ を入れる、 b, c は極大だが最大ではありません。

[Q13-10]⁽²²⁹⁸⁰⁰²⁾ 項書き換え系の完備化は必ず行なえるのか。

[A13-10] 完備化がいつも行なえると、語の問題が一般的に解けることになってしまいますから、そういうことはありません。完備化ができるかどうかの判定は、講義で紹介したような十分条件が多数知られているだけで、判定条件は知られていません。

[Q13-11]⁽²²⁹⁸⁰⁰³⁾ (1) 任意の部分集合 A が、上限と下限を A 内に持つような順序集合は全順序集合になるか？(2) 逆は成り立つか？

[A13-11] (1) なります ($\{x, y\}$ を考えよ)。(2) 逆は成り立たない (cf. 実数の集合)

[Q13-12]⁽²²⁹⁸⁰⁰³⁾ 「 a にさらに強い条件を与えて b の条件を満たすようにすることができる」というのは、(然るべき全体集合を与えると) 順序関係になるのか？群 \leq 環 \leq 可換環のように。

[A13-12] 公理系の強弱は (同じ言語で語られる) 理論の間に順序関係を定めます。実際には、定理全体の大きさが理論の順序関係として適切なものです。一方、「群 \leq 環」は、演算まで違いますから、構造の強弱という面もあります。

[Q13-13]⁽²²⁹⁸⁰⁰⁰⁷⁾ 最近の講義の、数学的に厳密な説明ではなく、大雑把なイメージが知りたい

(質問理由：例えば、群の公理で、subterm や critical pair の話しを用いた所)

[A13-13] 幾何学と違い、計算数学 (や離散数学の多く) の「イメージ」は、何かを実行するときの戦術・戦略の性格を持っています。手順のイメージですので、自分で実際にやってみる以外にはイメージを作ることはできません。

[Q13-14]⁽²²⁹⁸⁰⁰¹²⁾ 完備束、完備上半束において、Zorn の補題、もしくはそれと同じようなことが言えるのでしょうか。

[A13-14] Zorn の補題「帰納的順序集合は極大元を持つ」の結論は、上半完備束では最大元があるので自明に成立します。Zorn の補題は、完備上半束ではないような順序集合について極大元があることを示すためにあるものです。

[Q13-15]⁽²²⁹⁸⁰⁰¹³⁾ 代数学はどのように実用化されているのか？

[A13-15] 代数学の結果は色々応用されています（コード、暗号等）が、代数学自身は実用化されるような類の存在ではないでしょう。

[Q13-16]⁽²²⁹⁸⁰⁰³⁰⁾ $(x_1x_2)x_3$ と $x_4((x_5x_6)x_7)$ は unify といえますか？

[A13-16] 「unify でき」ます。木の形が合せられれば unify できるのか、ということ、そうではありません。同じ変数が数箇所に出てくると、その下に来る木が同じでなければならず、有限の木では解がないときもあります。

[Q13-17]⁽²²⁹⁸⁰⁰³³⁾ critical pair というのはどれとどれのことか。

[A13-17] §11.4.1 の定義と例を見てください。

[Q13-18]⁽²²⁹⁸⁰⁰³⁴⁾ §11.4.3 で出てきた文字 x, y, z, i, e はどういう性質のものか？

(質問理由：この講義全般に言えるのですが、よく木グラフを書いたりしているときに出てくる文字は単なる記号であって、何でもよいということなのですか。)

[A13-18] x, y, z は変数です。頂を木グラフで表した場合には、枝分かれの部分の文字は作用素記号ですから重要ですが、葉の部分は変数ですので、同時に置き換える限り何でも構いません。また、グラフ一般についての場合ですが、グラフの頂点に名前を付けるのは、「この頂点がああ頂点に...」といった「こそあど」言葉を排除するために、頂点に名前を付けただけで、何でも構わないのです。しかし、頂点集合 V が先に与えられている場合には、 V の要素を表す文字を使わなければなりません。

[Q13-19]⁽²²⁹⁸⁰⁰⁵⁰⁾ 順序集合や完備性などは、数学の他の授業ですでに教えられているが、この講義においてどのような位置づけなのか？

[A13-19] 順序集合の中でも束構造は多くの分野で自然に登場し、議論の本質を明確にするが、取り上げられないことが多い。

[Q13-20]⁽²²⁹⁸⁰⁰⁵¹⁾ なぜ、どの要素も空集合の上界なのか？

[A13-20] a が B の上界であるという定義は $\forall x[x \in B \rightarrow x \preceq a]$ だが、 $x \in B$ が成り立たないときは、いつも $x \in B \rightarrow x \preceq a$ は真なので、 $B = \emptyset$ ならば、この条件が成立します。