理学部数学科 2000 前期 計算数学 1 [1]

担当：辻下　徹[2]

訂正　§12.1.4 の上限の記号が間違っていました。$\bigvee A$ が部分集合 A の上限です。

今後の予定：数理論理学の基礎概念

9.8	命題論理学
9.22	述語論理 1
9.29	述語論理 2

後期セミナーで

田中俊一「位相と論理」（日本評論社 2000）

を読みます。内容紹介は `http://homepage.mac.com/stanaka3/topology.html` にあります。数学科の現行カリキュラムに沿った論理学入門、ということができます。

目 次

[1] URL:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html`
質問提出アドレス:`cs2000@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp`
[2] Email:`tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp`,
Homepage:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/`

数理論理学の初歩

13　命題論理

13.1　論理式

§8.6 で既に学習したが、簡単に復習しておこう。

[13.1-1] 命題定数:$\top, \bot$
[13.1-2] 命題変数:$P, P_1, P_2, \ldots, Q, Q_1, Q_2, \ldots, R, \ldots$
[13.1-3] 命題論理式 (ギリシア小文字 $\phi, \varphi, \cdots$ で表示).

$$\text{論理式} ::= \text{命題変数} \mid \neg\text{論理式} \mid \text{論理式} \wedge \text{論理式} \mid \text{論理式} \vee \text{論理式} \mid \text{論理式} \Rightarrow \text{論理式}$$

[13.1-4] 論理記号 ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$) の結合の強さは、$\neg \quad > \quad \wedge, \vee \quad > \quad \Rightarrow$.
[13.1-5] $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$ を $\varphi \Leftrightarrow \psi$ と書く。
[13.1-6] 例 $P, Q, \neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \Rightarrow Q, (P \wedge Q) \Rightarrow \neg R,\ (P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow P,\ \neg\neg P \Rightarrow P$.

13.2　ブール多項式表示

$\Rightarrow$ を使っていない命題論理式を表すとき、$\neg P, P \wedge Q, P \vee Q$ をそれぞれ、P',PQ,$P+Q$ と表すこともある。普通の場合と同様に、積は和より結合度が強いとする。

13.3　命題論理式の意味

ドメイン $\mathbf{B}$ 上の作用素型 $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$ 上の構造をつぎのように定める：

[13.3-1] $\top_{\mathbf{B}} = 1, \bot_{\mathbf{B}} = 0$,
[13.3-2] $\neg_{\mathbf{B}}(x) = 1 - x$,
[13.3-3] $x \wedge_{\mathbf{B}} y := \min(x, y)$,
[13.3-4] $x \vee_{\mathbf{B}} y := \max(x, y)$,
[13.3-5] $x \Rightarrow_{\mathbf{B}} y := \max\{1 - x, y\}$.

このとき、項（すなわち命題論理式）φ に出現する命題変数を $P_1, \ldots, P_n$ とするとき、写像 $\varphi_{\mathbf{B}} : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$ が定まる。

この写像が定数写像 1 となるとき、φ は**トートロジー**（恒真式、恒真命題）といい、$\models \varphi$ と書く。$\varphi \Leftrightarrow \phi$ がトートロジーのとき、φ と ϕ は**論理同値**であるという。論理同値は同値関係であることはすぐにわかる。論理同値な論理式は同じであるとみなす。（正確に言うと、論理式の論理同値類で考える。）

13.4　命題論理のインフォーマルな説明

世界の現状についての（Yes or No で答えるべき）質問毎に論理変数を一つの用意する。「暖かいか？」「食べ物があるか？」「雪が降っているか？」「ポチは生きているか？」「$1+1=2$ か？」等々の質問の各々に

対して論理変数を用意する。問いのセット $P_1, \ldots, P_n$ を決めると、状況は問いへの答えによって認識される。問いの数が多いほど（問いに重複がないときは）世界の状況はより詳しく識別される。

13.4.1　一つの質問だけのとき

世界の状態は２通り。「暖かいか？」という命題変数 W しか持たない生物にとって、世界の状態は２通りしかない。

世界の構造（その世界で起こりうる状態の全体）は $4 = 2^2$ 通り。ただし、この中で、「暖かいこともなく、暖かくないこともないような世界」は禅問答ではありそうだが、ふつうの常識的な論理では無意味であるが、数学的には「矛盾した世界」（空虚な世界）ということで、ゼロと同様に有益な役割を果たす。したがって、上の生物にとって、世界は「いつも暖かい」「いつも暖かくない」「暖かいときも暖かくないときもある」の３種類しかない。

13.4.2　二つの質問のとき

世界の状態は $4 = 2^2$ 通り。W「暖かいか？」F「食べ物があるか？」という命題変数しか持たない生物にとって、世界は「暖かくて食べ物がある」「暖かいが食べ物がない」「暖かくないが食べ物がある」「暖かくもなく食べ物のない」の４通りの状態しかない。世界の構造は、この４つの内のどれが成り立つかで（空な場合を除くと） $15 = 2^4 - 1$ 通りある。

13.4.3　n 個の質問のとき

世界の状態は 2^n 通り。世界の構造は $2^{2^n} - 1$ 通り。

13.5　「世界の状態」の表示法：リテラル

n 個の命題変数 $P_1, \ldots, P_n$ があるとき、世界の状態は「リテラル」 $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ で表示できる、ただし、Q_i は P_i または P'_i。リテラルは論理式

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_n$$

の省略形（P'_i は $\neg P_i$ ）。

リテラルは 2^n 個ある。

13.6　世界の構造の表示法：リテラルの和

＜世界の構造＞を起こりうる状態を列挙して表示する。

たとえば、C「寒いか？」, S「雪が降っているか？」という２つの問いで世界の状態を認識するとする。このとき（現実の地球では)、$CS, CS', C'S'$ は有りうるが、$C'S$ はあり得ない。従って、この２つの問いしか持たない生物にとっての世界の構造は $\{\, CS, CS', C'S' \,\}$。論理式としては、$CS + CS' + C'S'$ となる。これは $S \Rightarrow C$ と論理同値である。つまり、この世界の構造（特徴は）「雪が降っていれば寒い」という法則で表現される。

同じように「暖かくて食べ物がある」「暖かくないが食べ物がある」「暖かくもなく食べ物もない」という３通りの状態だけが可能な世界では「暖かければ食べ物がある」という構造がある。また、「暖かくて食べ物がある」「暖かくもなく食べ物のない」の２通りの状態しかない世界では、「暖かいということと食べ物があるということは同じ」という構造がある（つまり $W \Leftrightarrow F$ がこの世界の特徴を表現する)。

13.7 命題論理式の間の擬順序関係

$\varphi \Rightarrow \phi$ がトートロジーのとき、$\varphi \preceq \phi$ と書き、ϕ は φ **から導かれる**という。このとき、

[13.7-1] 論理式の論理同値類の全体 **Formula** は $\preceq$ により順序集合となる。
[13.7-2] この順序集合で、$\phi \vee \psi$ は ϕ, ψ の上限, $\phi \wedge \psi$ は ϕ, ψ の下限である。

$\varphi_1 \quad \wedge \quad \cdots \wedge \quad \varphi_n \Rightarrow \varphi$ がトートロジーのとき、

$$\varphi_1, \cdots, \varphi_n \vdash \varphi$$

と書き、$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ から φ が導出されると言う。

13.8 理論

Formula の部分集合で upper closed で $\wedge$ 演算で閉じているものを**理論**という[3]。ここで、*upper closed* とは、$\phi \preceq \psi$ であって ϕ を含めば ψ も含むことである。また、$\wedge$ 演算で閉じているとは、ϕ_1, ϕ_2 を含めば $\phi_1 \wedge \phi_2$ も含むことを言う。理論に属する元を、理論の**定理**と呼ぶ。

論理式の集まり $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ があれば、それが導出する論理式の全体が理論 $\mathcal{T}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ を定める。$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を、この理論の公理系と呼ぶ。一つの理論を定める公理系はたくさんある。有限個の公理系は、連元を取れば一つの論理式で表せる。したがって理論の数は、用いる命題変数の数 n を決めるとき、論理式の論理同値類の数だけある。これは、$Map(\mathbf{B}^n, \mathbf{B})$ の元の数 2^{2^n} だけある。これをつぎに示す。

13.9 論理式の標準型

n 個の命題変数を含む命題論理式の論理同値類は、多項式の場合と同様に、リテラルの和として（項の順番を除いて）唯一に表示される。

証明 まず、論理同値類が $Map(\mathbf{B}^n, \mathbf{B})$ の部分集合になることは明らか。そこで、$Map(\mathbf{B}^n, \mathbf{B})$ の元がすべて論理式で表示できることを示せばよい。

まず、$b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbf{B}^n$ に対してリテラル $L_b = Q_1 \cdots Q_n$ を、$b_i = 1$ のとき $Q_i = P_i$,$b_i = 0$ のとき $Q_i = P_i'$ と定めるとき、$L_{b\mathbf{B}}$ は b で 1、他では 0 となる。（デルタ関数の類似）

そこで、任意の写像 $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$ に対し論理式を

$$\varphi_f := \sum_{f(b)=1} L_b$$

と定義すると、明らかに $F_{\mathbf{B}} = f$。

任意の論理式 φ がリテラルの和と論理同値であることは、上の f として $\varphi_{\mathbf{B}}$ を使えば明らか。

（証明終わり）

[3] こういう用語の使い方は好ましいものではないが、よくあること。余り惑わされないように。以前の「代数的理論」と同じような使いかた

13.10 世界の構造と理論との対応

n 個の命題変数で記述される世界の構造（すなわち $\mathbf{B}^n$ の部分集合）は、リテラルの和 φ として書ける。これを公理とする理論の定理は、その世界ではいつも成り立つ Yes が答えとなる質問である。従って、世界の構造は理論を定める。

逆に理論があれば、その中の論理式がすべて正しくなるような状態の全体として、世界の構造を定めることができる。

この対応は互いに逆となっている。

13.11 命題論理と幾何学の類似

数理論理学	幾何学
命題変数	変数
リテラル	単項式
論理式	多項式
論理式	方程式
理論 $\mathcal{T}$	イデアル $\mathcal{I}$
モデル全体 $\mathcal{M}(\mathcal{T})$	零点集合（多様体） $Z(\mathcal{I})$

質疑

すべてに回答はしていません。

[**Q14-1**](22950035) 計算数学の授業で習ったことの中で、実践的なもの、会社等で応用されているものがあれば教えてください。

(質問理由：例えば銀行での預金高予測のシミュレーションをするとか、証券会社で経済予測をするなど、計算数学が応用されている具体的な例があれば教えてください。)

[**A14-1**] シミュレーションや予測等は、力学系・確率論等が応用されている例です。それを計算機で実行させる部分は一部数値解析プログラミングの理論が使われます。この計算数学 1 のテーマではありません。新しいシステム記述言語などを研究するような会社や研究所であれば、代数系・書き換え規則などの知識は基本的なものです。

[**Q14-2**](22970002) 上限が存在すれば必ず上界は存在するでしょうか？

[**A14-2**] 上限は上界ですから、もちろん存在します。

[**Q14-3**](22980002) 整除関係の最大元は 0 は納得できない。

(質問理由：$0 \preceq 0$ ではないから。)

[**A14-3**] 御指摘の通りです。この場合の順序は、$x \preceq y$ を $x \neq 0$ のときは $x|y$, $x = 0$ のときは $x = y = 0$ というように場合わけをして定義しなければなりませんでした。

[**Q14-4**](22980011)「完備下半束は完備である」という命題は存在するか？

[**A14-4**] 成立します。順序関係については、双対原理があり、すべての概念に双対概念があり、定理にも双対な定理があります。これは、$x \preceq' y$ を $y \preceq x$ で定義すると順序関係となることからわかります。

[**Q14-5**](22980012)$\bigwedge \{ a, b \}$ を $a \vee b$ と書くのは a, b のうち大きい方という意味があるからですか。

[**A14-5**] 誤植です。

[**Q14-6**](22980013) 同値関係は順序関係か？

[**A14-6**] 同値関係が順序関係でもあるときは恒等関係になります。簡単な演習問題ですから証明してみてください。

[**Q14-7**](22007806) 極大元が存在しないのというのは元が有限個の場合ありえないのではないか？

[**A14-7**] その通りです。Zorn の補題は、無限集合の場合に、極大元が存在するための十分条件を

与えるものです。

[**Q14-8**](22980041)「最大元は極大元」の逆は成立するのでしょうか。

[**A14-8**] 成立しません。整除関係を入れた集合 $\{2,3,4,6\}$ では $4,6$ が極大元ですが、最大元はありません。

[**Q14-9**](22980047) 順序集合が完備束でなくても、上限下限が存在することはあるのですか？

[**A14-9**] 完備束でなくても上限が存在する部分集合はあります。例としては、実数集合 $\mathbf{R}$ に普通の大小関係によって順序集合としたとき、最大元がないので当然完備ではありませんが、上に有界な部分集合は上限を持ちます。

[**Q14-10**](22980034)§12.1.3 「最大値が存在しない理由」がよくわかりません

(質問理由：極大値が２つあるときは、その最大値が最大元というわけではないのですか。)

[**A14-10**] 全順序集合（どの２元 x, y についても $x < y, x = y, x > y$ のいずれかが成り立つ順序集合）では、その通りです。極大元は最大元となります。

しかし、一般の順序集合では比較できない元があるので、複数の極大元が存在する可能性があり、極大元が複数あれば最大元は存在しえません。

[**Q14-11**](22980030) 今までの数学で、$x \leq M$ の否定は $x > M$ と疑わずにやってきましたが、x と M は比較不能かどうかを考察してからそうやるべきなんでしょうか？

[**A14-11**] その通りです。「$x \leq M$ の否定は $x > M$」が保証されているのが全順序集合です。そうでない場合は、「比較不能」という選択肢を絶えず意識しなければなりません。なお、記号 $\leq$ は数の大小関係からの連想が強いため、ぼんやりすると全順序だと思い込んでしまいますので、新しい記号 $\preceq$ などを使うのです。

[**Q14-12**](22980031) どの要素も $\emptyset$ の上界なら、どの要素も $\emptyset$ の下界ですか。

[**A14-12**] その通りです。

[**Q14-13**](22980033)(1)

```
4                   4
|                   | \
2          3    と  |   \
 \       /          |   2   3
   \   /             \  |  /
     1                \ | /
                        1
```

に違いはありますか。

(2) 比較できない元を含むとき Hasse 図はどうなるか。

[**A14-13**] (1) 右は Hasse 図ではありません。4 と 1 を結ぶ線は、情報として不要です。そういう線を省いたのが Hasse 図です。

(2) 上の Hasse 図で、4 と 3 は比較不能です。

[**Q14-14**](22980035) 極大とはどのようなイメージでとらえたらいいのですか。

[**A14-14**] 社会に支配従属関係（話しを単純化して考えます）を入れて順序集合と考えます。極大元は、誰からも支配されない者を意味し、最大元は、すべての者を支配する者を意味します。一匹狼（誰からも支配されないが自分以外の誰も支配しない者）は極大元（かつ極小元）です。現代社会は他から支配されない者は沢山居るが、社会全体を支配する者（最大元）は居ません。

同様に、極小元は自分以外の誰も支配しない者を意味し、最小元は、すべての者に支配される者を意味します。