理学部数学科 2000 前期 計算数学１[1]

担当：辻下　徹[2]

1　第１回

目 次

講義の注意

- 毎回、講義終了時に「質問表」を提出して下さい。講義の中で疑問に思った点・わからなかった点等について質問をかいてください。また、その質問の説明（どういう意味でわからなかったか、など）を書いてください。次の回にいくつかの質問に答えます。
- Mathematica の演習を４－５に行います。情報処理教育センターで行います。

1.1　離散数学について

世界を素朴に見るとき、見分けることのできる個物と事件から成り立っています。これを離散的世界像と呼びましょう。人、動物、植物、家、本、机、ＴＶ、大学、文字、言葉、星、川、国、誕生、入学、講義、卒業、就職、結婚、退職、死、…。

離散的世界像はここで終わるわけではありません。私達はこれらの間の色々な関係を見出し、また、これらと色々な付きあいを持ちます。判然と見分けることのできる関係として、親と子、部品と機械、持ち主と所有物、右と左、時間の前と後、含む含まれる、文で結合された語、等々。また、判然と見分けることのできる付きあいとして、作る、制御する、破壊する、会話する、持つ、使う、理解する、分類する、等々。

判然と見分けられる関係や付きあいも離散的世界像の欠かせない部分をなしています。世界のこういった側面は小学校以来の学校教育において国語や社会の教科で散発的に取り

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html

[2] Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

上げられることはあったかも知れませんが、離散的世界像が内包する種々の数学的現象について学ぶことは、（自然数を除いては）順列組み合わせ以外にはなかったと思います。その理由は学問の歴史から来るものと思われます。

離散的世界像は日常生活に近すぎるために哲学的考察から＜数理的＞探求の対象となることはほとんどありませんでした。唯一例外としては数があります。数の豊富な操作が持つ深遠な予期できない関係が多くの人を惹き付けて、いまでも魅力を保ち続けているようです。一方、量と形の数学は、商売や土地管理で必要なために幾何学や量の数学が発展しました。さらに、光・水・火・空気・土のような離散的世界像からはみ出て神秘性のある者が科学者の関心をとらえ１６世紀ニュートンによって自然把握のための数学として解析学が構築され、３００年を経て物理的世界像は高度に磨かれた数学的形式を通して表現され精密な予測と制御が可能となり人類は歴史上かつてないほどの自然支配力を持つに到ったわけです。

以上のように、歴史的には数学は数論・幾何・解析にそって発展してきました。そして、そのように学校教育でも数学は教えられているわけです。

しかし、コンピュータの驚異的技術進化によって、社会を支える知的作業の内容や形態がコンピュータ技術によって根底から変化しつつある今、離散的世界像を的確な数学的形式を通して深めていくことが急務です。それが離散数学の現代における重要性のひとつであると言うことができるでしょう。少なくとも数学科出身者は、加減乗除や微積分に相当するような基礎離散数学の使える知識を身に付けることが望ましいと思います。

なお、離散数学の重要性は実用的なものだけではありません。２１世紀の科学の主役と言われている生命科学の対象である生物は、物理的世界像と離散的世界像の双方に跨がる存在です。そこでは離散数学が重要な役割を果たすことは明らかであると思います。

２０世紀では種々の離散数学が発展し

- 代数学の一部（群論など）
- 組合論
- グラフ理論
- 数理論理学
- 計算論（形式言語論、オートマトン理論）

などは独立した分野を成しています。この講義は、グラフ・形式言語を中心に基礎離散数学のを学ぶことにします。

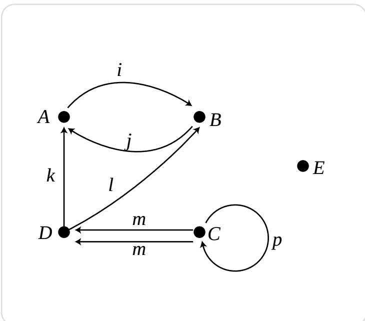
1.2　グラフ理論

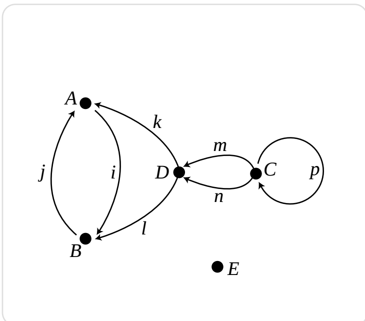
素朴な定義　グラフ[3]は**頂点**と**辺**から成ります。辺には、**始点**、**終点**と呼ばれる 2 頂点が指定されています。始点と終点は同じこともあります。

具体的グラフの与え方　具体的グラフをひとつ与えるのに必要な情報は、頂点の集まり、辺の集まり、そして、各辺の始点・終点の指定です。たとえば次のような表で与えることができます。ここで i が $A{\to}B$ と書いてあるのは、i の始点が A, 終点が B ということを意味します（こういった＜意図＞を明示的にする記法は論理的には何の意味もありませんが数学的には極めて重要です)。

頂点	A, B, C, D, E
辺	始点 $\to$ 終点
i	$A{\to}B$
j	$B{\to}A$
k	$D{\to}A$
ℓ	$D{\to}B$
m	$C{\to}D$
n	$C{\to}D$
p	$C{\to}C$

図示　有向グラフは図示することが論理的には不要ですが「数学的に」不可欠です。平面上に頂点をばらまき、$X{\to}Y$ という辺 e があるときは、X と Y を端点とする曲線を描き、X から Y に向かう線分であることを矢印などで表示します。下のいずれも上のグラフの図示となっています。





集合論的定義　集合論の言葉を使うと、グラフは

- 頂点集合 V,

[3] 辺に向きが付いているので有向グラフ、digraph, directed graph などということがありますが、集合論的には二項関係そのものですから有向グラフ概念を出発点とすることにします。本によってはグラフは辺に向きのない「無向グラフ」を意味することも有りますが、この講義ではそれは対称グラフと呼びます。

- 辺集合 E,
- 始点写像：$s : E \to V$ と終点写像 $t : E \to V$, ただし、頂点 $s(e)$ は辺 e の始点 (source) で、頂点 $t(e)$ は 辺 e の終点 (target)。

で与えられます。つまり個々のグラフは４組 $(V, E, s : E \to V, t : E \to V)$ で指定できます。

ここで、V, E, s, t という記号はグラフごとで内容が違うことに注意してください。２つのグラフがあるとき、どっちの V か、ということで混乱が起きることがあります。そこで、他の数学の場合と同様に、議論の対象となっているグラフにはひとつであっても名前を付けます。たいてい G や Γ を使います。グラフ G の頂点集合を $V(G)$ と書きます[4]。２つのグラフ G_1, G_2 が話題になっているときは、$V(G_1), V(G_2)$ などと書くことができます。そして、しばしば、これを V_1, V_2 などと書くこともあります。

なお、写像 s, t は、写像 $\partial : E \to V \times V$ を $\partial(e) := (s(e), t(e))$ によって定めます。これは全単射

$$Map(E, V) \times Map(E, V) \longrightarrow Map(E, V \times V)$$

を定めていましたね。そこで、ときどき、有向グラフを３組 $\langle V, E, \partial : E \to V \times V \rangle$ で与えることもあります。∂ が単射であるとき、つまり、始点と頂点が同じ２つの辺が存在しないときは、

$$E \subseteq V \times V$$

としても構わないことになります。ただし、ここで「構わないことになります」という言い方に正確な意味を与えるには、２つのグラフがいつ「同じ」であると思うか、を決めて置く必要があります。つまり、グラフの同型概念を与える必要があります。その定義は自分でしてください（宿題です）。

グラフの遍在性　自然数が到るところで登場するのと同じくらい、グラフは到るところで登場します。なにせ二項関係そのものの別称ですから、関係あるところにグラフあり、といえます。グラフ理論は私の専門ではありませんが、グラフは私が一番好きな数学的対象のひとつです。

身近なものでは木 (tree) というグラフがあります。その中でも２分木は小学校以来競技会などで、トーナメント表として親しんでいるものです。また、生物分類表や、色々な官僚組織なども木グラフで表示されます。

また、一方通行の場所のある都市の道路地図などはグラフのよい例です。また、通信網などネットワークと呼ばれているものも色々な仕方でグラフで記述できます。当然、ニューロンの成すネットワークも一例です。

また、時間的な変化もグラフで表示することもできます。力学系も特殊なグラフとみなせます。並列処理などの解析にもグラフはよく使われます。

以上のような実在するグラフだけでなく、物事の状況を分析するのにもグラフを使うことができます。多くのパズルは、色々な操作を組み合わせて最初の状態から目的の状態に達する問題として捉えられますが、途中で取りうる状態を頂点とし、与えられた操作に

[4] $V^G, V_G, V[G], {}^V G$ 等々一貫していればどういう記法でもかまいません。

応じた辺を用意すれば、パズル全体がひとつのグラフで書けます。そういう例からグラフに慣れることにしましょう。

1.3　例題：渡し守りのパズル

上のようにして次のパズル (Ferryman's Puzzle) を解いてみよう。

> 渡し守が旅人に犬・羊・キャベツのつつみを川の向こう岸まで運ぶことを頼まれた。渡し舟には１匹または１つしか乗せることができない上に、困ったことに、渡し守の居ないところでは、羊はキャベツを食べてしまうし、犬は羊を食べてしまうのである。渡し守は仕事を引き受けてよいのであろうか？

1.3.1　グラフによる解法

- 状態を頂点、相互に移りあえる２状態を結んで、グラフを描く。
  - まず、状況の本質を見抜き「状態」を設定（ここが勝負）。
  - 状態の記述法を決め、許容される状態を数え上げる。
  - 遷移グラフを作成。
- 初期状態と最終状態とを結ぶ道を探す。

1.3.2　演習問題：３人宣教師と３人の人喰族

> ３人宣教師と３人の人喰族の一行は大きな川を渡らなければならない。運よく２人乗りの小舟が見つかったのだが、困ったことに一所にいる人喰族の人数が宣教師の人数よりも多くなると、宣教師は食べられてしまうのである。この一行全員が生きてこの川を渡ることは果たしてできるのであろうか？