理学部数学科 2000 前期 計算数学 1 [1]

担当：辻下　徹[2]

2　第 2 回

目 次

2.1　参考書

参考文献

[BB] バーコフ・バーティ(一松信訳). 現代応用代数 I ,II. 新曜社 1973. 現代数学の形成者の一人であるバーコフ自身による数学科向きの計算数学入門. 絶版となっているが、最良の教科書。

[GKP] グラハム・クヌース・パタシュニック（有澤誠他訳)「コンピュータの数学」(原題：Concrete matehmatics, A foundation for computer science), 共立 1993, ISBN 4-320-02668-3. TEX の創始者であるクヌースがスタンフォード大学で２０年ほど行った講義の教科書。数学的深さも十分ある。

[M] 守屋悦朗. コンピュータサイエンスのための離散数学, サイエンス社 1992. ISBN 4-7819-0643-5 .

[K] 桔梗宏孝. 応用論理, 共立 1996, ISBN 4-320-02651-9. 数理論理学の意義についても触れた、丁寧な論理学入門.

[Li] リプシッツ,S. （成嶋弘監訳）. 離散数学–コンピュータサイエンスの基礎数学. マグロウヒル 1984.

[O1] 小野寛晰. 情報代数、共立 1994, ISBN 4-320-02652-7.

[O2] 小野寛晰. 情報科学における論理. 日本評論社 1994.

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html

[2] Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

[S] スキエナ,S.（植野義明訳）「Mathematica 組み合わせ論とグラフ理論–離散数学を実現する」トッパン 1992, ISBN 4-8101-8050-6.

[W] ウルフラム,S.(白水重明訳) 「Mathematica, A system for Doing Mathematics by Computer」星雲社 1992. ISBN 4-7952-9614-6.

2.2 前回の質問事項と回答

1. 語句の意味
2. グラフの定義に関して
3. グラフの同一性について
4. 意義について
5. 背景について
6. 講義について
7. 離散数学について

[QA-1] 「見やすいように」図に存在と関係をあらわしたものが「グラフ」なのですか？

絵に書いたのはグラフの表示です。グラフ自身は (V, E) というデータです。

[QA-2] どういう図をグラフというのですか？

(V, E) という情報を表示できていればグラフと言ってかまいません。

[QA-3] $j : b{\to}a$ のことを i^{-1} とかで表したりはしないのですか？同じように、$k : D{\to}A$, $\ell; D{\to}B$ となっているのですが、ℓ のことを $i \circ k$ といったもので表せたりはしないのでしょうか？

辺 i を $A{\to}B$ と書くのは関数とたまたま同じ記法となっているだけですので、i^{-1} や $i \circ k$ と表すことはありません。ただし、圏という、グラフの辺同士の「積」を考える数学的構造がありますが、その場合は、上のような記号が使われます。

[QA-4] 小舟で川を渡った時、舟はどうなるのか？
ボートが自然にもどってくるのか、人がのっていないと戻らないのかで条件が違うので、たぶんあとの方だと思うが、人食い族の人数が多くなったときというのは舟が反対の岸についたときには舟でもどってくる人も入れなくてはいけないとすると、必ずどちらかの岸で人食い族が多くなると思う。

舟は人が漕がなければなりません。

[QA-5] 離散数学の理論は現実世界でどのように応用されているのか。

コンピュータを用いた作業は、測量・画像等のアナログデータを除き、離散数学の範疇に属する。

[QA-6] どのようなものが離散数学か。

連続量を用いないもの。論理学、計算理論、有限群論、形式言語、グラフ理論、等。
有限集合上の数学的構造は離散数学に属するものと考えてよい。

[QA-7] 離散数学が連続量（変数）を扱う数学とは区別された分野であることはわかったが、どのようなものが離散数学であり、また、離散的世界像という言葉も何をとらえてそう呼んでいるか。

世界が、一つ一つ識別できる個体から成っていて、個体ごとは離れているという意味で離散的という。離散的は「discret」の訳。
英和辞典１「分離した，個別的な，別々の (O → indiscrete); 不連続の.」
英和辞典１「分離している, 別個の; はっきり区別されている; 組み合わされていない
例文：A nebula is really a discrete mass of innumerous stars.

[QA-8] 離散的なものと連続的なものの間にどのようなものがあるのでしょうか。
離散的なものと連続的なものの間の境界はぼやけているということに言及されましたが、そのようなぼんやりとした境界上にあるものにはどのようなものがあるのでしょうか。

連続的／離散的の違いは我々の捉え方に依存しています。運動にまつわる古来のパラドックスは、この関係の難しさを示しています。運動の言語的記述は、言語が離散的であるために、矛盾に満ちたものになる。

[QA-9] 「離散数学」とは、個別のものに、数学的規則を与えると考えていいのか、どうでしょう。

それに近いです。近似的には有限集合上の数学と言ってもいいとおもいます。もちろん、無限離散構造も離散数学と言えなくもないですが、この講義では有限的なものしか扱いません。

[QA-10] 離散的世界像の定義がよくわかりません。

世界が、１つのものとして把握できる個体の有限個から組み立てられたものと見ることです。 ただし、 有限が大きくなると、離散的世界像ではなくなります（原子論からすれば世界は離散的ですが我々が経験する世界は物理的には離散的には見えない）

[QA-11] 見分けることのできる個物と事件から成り立つのを離散的世界像と呼ぶとありましたが、「見分けることができる」というのが抽象的でよくわかりません。名称がついていれば見分けることができているということでしょうか。あと対照的に使われている物理的世界像との違いはなんですか？

見分けられることと名前が付けられることとは、どちらが先ということはないものです（だまし絵がよい例）。物理的世界像は連続量を用いて記述されところが、離散的世界像とは違います。

[QA-12] 離散数学とは結局どういうものなのかよくわかりません。代数、幾何、解析とは別のものなのですか。

「離散数学は結局〜というもの」というタイプの理解は必要ありません。今のところ、実数を使わない数学という程度の認識で結構です。代数、幾何、解析、というほど明確に分節化できない言葉です。代数と解析は離散数学的な部分が沢山あります。

[QA-13] 去年も今年も計算機演習をとっていないですが授業にさしつかえないのですか。

ありません。

2.3　個々の質問と回答

■質問, ○質問理由, ◆回答

【グラフの定義に関して】
■有向グラフで、始点と終点が同じ辺を２つ以上存在するのはなぜ？
○始点と終点が同じ辺が２つ以上存在することもありえるようなのですが、具体的にどのような状況のときに２本以上必要なのですか？
◆道のつくるグラフでは、A で道が分岐して B で合流するようなときです。
「存在するのはなぜ？」と聞くのではなく、「２つ以上存在するものを考える必要があるのはなぜ？」と問わなければいけない。

【グラフの同一性について】
■　２つのグラフがいつ「同じ」であるかを決めておく必要があると書かれていますが、その定義は、問題によって変わるものですか？

$i : A \to B, j : B \to A$ というグラフと $j : A \to B, i : B \to A$ というグラフは

同じものなのですか、異なるものなのですか。
◆異なるけど同型です

■　グラフが同じであるとはどういうことか。
◆「同じ」は、すべて何らかの基準で同じと判断することです。a=a は無意味ですし、a=b　は背後にそういう基準があって始めて意味があります。

【意義について】
■このパズルの根底にどのような数学があるんでしょうか。具体的に表すのは難しいです。
◆グラフ理論で、２点間の道を求める問題になっています。

■有向グラフを図示することは論理的に不要で「数学的」に不可欠なのは何故ですか？
○有向グラフを図示するには、例題や演習問題を解くのに使いましたが、他の使い方もあるのか知りたいからです。
◆一つのグラフの情報は（V,E,s,t）で与えられるが、この情報が「どういうものか」を把握することが、数学を展開する上で不可欠である。通常はこれを人間の論理的推論力を補うための道具でしかないと位置づけられているが、それなしには、正しい推論をする以前に、どういう推論をすればよいかがわからない。

■　離散的世界という言葉がよく授業で用いられていましたが、このような抽象的なものを学問するのは難しいのではないですか。
○卒業や結婚など、学問しずらいものを、離散的世界に入るとありましたが、そういったものも、この授業で深く理解できるのか疑問に思ったからです。
◆時間変化の中にいくつも大きな事件や記念すべきことがあります。そういうものを抽象的に「時点」と考えるということです。結婚記念日というべきだったかも知れません。その内容には立ち入りません。人生をいくつかの節目を通して、そして、節目の間の関係に着目して記述する、ということです。従って、成長過程や学習過程、などはここでいう離散数学には入りません。

■講義のようなパズルをグラフで解くときの利点は何ですか。
■++例題では許される場合が少ないのでわざわざすべてを数え上げなくてもすぐわかると思いま

す。
◆頂点数が少ないからこそ、この解法の全体像がすぐにわかるのです。このパズルは解法を理解するためのパズルです。いわば、練習用のもの。

■無向グラフというのはどういうときに使うのですか。
◆たとえば、道路地図ですと、一方通行などの規制がない場合いには、無向グラフの方が自然です。

■必死で「宣教師のグラフ」を描くことに意味があるのですか。
○ 僕の前のやつが、こっちは死ぬ気でグラフを描いて考えているというのに、あっさりと消しゴムすら使わず、全員が川を渡るルートを見つけてしまったのです。僕は生きていることに疑問を感じました。しょせん、数学という学問は、センスと勘を便りにしなくてはいけないのですか。
◆この問題は有名ですから覚えていた可能性もありますが、そうでないとしても、何事も得意不得意というものがあります。自分が苦手なことはすべきではありません。有名な数学者が若いとき同僚が行列計算を暗算で楽々とするのを見て、その同僚とは違う分野に移って成功したという逸話もあります。こんなことで生きていることに疑問を感じていては命がいくつあっても足らないですよ。

■グラフによる解法はパズル以外ではどのような使い道があるのでしょうか？
◆多くの探索問題（様々な可能性の中から目的に達する道を選ぶ問題）は同じ種類の問題です。

% 背景について
■グラフで問題を解く方法は Mathematica でできますか。
◆できます。

■離散数学が発展した結果、代数学の一部を成すようになったのですか？
◆代数学が離散数学の一部なのであって、逆ではありません。離散数学と代数学の歴史的関係という問いは大きな問いです。数学史の本を見て下さい。
○ぼくは代数学を中心に勉強していきたいと思っているのですが、この離散数学がどのように群論に関係しているのか疑問に思ったのですが、どうでしょうか？
◆グラフは関係の視覚化（幾何学化）と思うことができます。群とグラフの関係は密接です。まずグラフの同型群は、具体的な群の重要な例を提供します。群の作用は、ラベル付きグラフで表示することにより考えを幾何的に表現できます。

■アルゴリズム本で見かける幅優先総当たり戦略とどう違うのですか。
◆グラフによる解法は２段階あります。最初の段階は、まず、グラフ化すること。次は、そのグラフの中の道を見つけること、の２段階です。「幅優先戦略」は後者における方法の一つです。

■離散数学における「秋山仁」の功績は何ですか？
◆講義の中で紹介しましょう。

■グラフの他にはどのように記述すればよいでしょうか？
◆グラフに種々のラベルを付けるものが使われます。また、グラフを一般化したハイパーグラフが

あります。
情報の記述としては種々のデータ構造があります。

■離散数学の答えは一意的ではないそうですが、できるだけ万人にわかりやすくするためにどのようなものが用いられていますか？
○離散数学はいろいろな分野がありますが、実用的なものにするためには、ある決まりをつくらなければならないと思います。グラフの他にはどのように記述すればよいでしょうか？
◆問いの趣旨が不明です。「決まりをつくる」というのはどういうことを念頭においていますか。
理論を実用的にするのは＜理論の使い方＞です。その中で「決まり」が作られます。
そこは創意工夫です。離散数学の場合は、工夫の自由度が高いのです。

% 講義について
■講義予定があるなら教えてほしい
◆質問の様子で内容や進行の度合いを調整する予定です。

■この授業では、「計算」とはどういう意味ですか。
◆計算は、規則に基づく記号変形のことです。離散数学の多くの操作は計算と見ることができます。実際、プログラム化することが出来ます。

■ Mathematica で何をやるのですか？
◆離散数学の内容は計算機化するときに Mathematica が使える。

■離散数学を勉強するにはどんな参考書を見ればよいですか？
◆上に紹介しました。

■この授業の最終的な目標は何ですか？
◆種々の記号処理が数学を支えているが、それ自身の持つ数理の基礎を理解する。
（書換え規則、普遍代数、束）

% 語句の意味
■プリント内の分 1.3.1 許容される状態、遷移グラフの意味がよくわかりません。
◆前回、口頭で説明する時間がありませんでした。きょう説明します。

■グラフによる解法で許容される状態が非常に多くなる場合はどのようにして解くのがよいのか・。

◆計算機が不可欠ですが、それも万能ではありません。それが計算量の分野の主題です。

■ $Map(E,V)$ とは何ですか。
◆写像集合 $\left\{ f \;\middle|\; f : E \to V \right\}$ のことです。

■ グラフ理論のグラフは一般的に使われているグラフと同じ言葉なのでしょうか。
◆「グラフ」の普通の語義は「図表、図式、図」というものです。高校までで使った

のは、関数の図示、や、表の図示という意味でのグラフでしたが、ここで使っているグラフは「テクニカルターム」（technical term，学術的用語）です。集合と同じです。言葉は同じですが、ここでは、単に（V,E，s,t）の4組のことをそう呼ぶのです。そして、そういう言葉を割り当てた「心は」というと、例のようなタイプの図形をコーディングするためのものだからです。

■ $E \subseteq V \times V$ という表記について。

○写像を集合の包含関係で置き換えるというのがよくわかりません。また、「構わないことになる」という表記に厳密さを感じないのですが。

◆まず、部分集合は $E \subseteq V \times V$ は包含写像 $E \to V \times V$ を与える。グラフの同型を定義すると、$(V, E, \partial : E \to V \times V)$ と $(V, \mathrm{Im}\,\partial \to V \times V)$ とは同型になる。

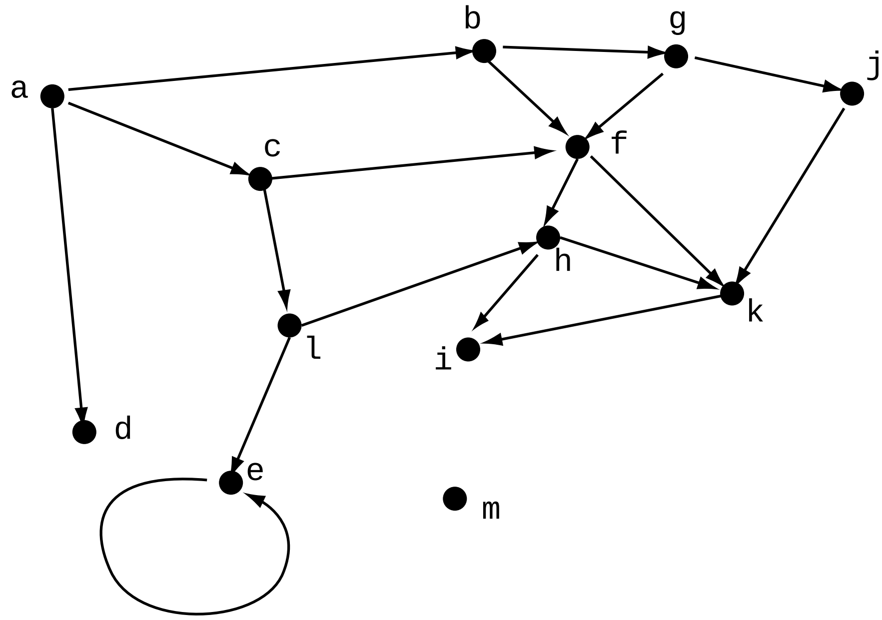
2.4 グラフの用語

多重辺がないグラフだけを考えるので以下のように定義が簡略化できる。

2.4.1 集合 V と、V の順序対の集合 E とのなす組 (V,E) を**グラフ**という。V の元を**頂点**,E の元を**辺**という。辺 (s,t) の**始点**とは s のことをいい、**終点**とは t のことをいう。(s,t) が辺のとき、象徴的に $s{\to}t$ と書く。

2.4.2 グラフ $\Gamma=(V,E)$ の頂点 v について、v を始点とする辺の数をv **の出次数**、v を終点とする辺の数をv **の入次数**という。

2.4.3 頂点集合が有限な場合には、平面上にグラフを次のように図示する：各頂点 v に対して平面上に点を一つ選ぶ：P_v、ただし、重ならないようにとる。$v{\to}w$ の時に、点 P_v から点 P_w へ線引き、P_w の方へ矢印を書く。



2.4.4 グラフ (V,E) からグラフ (V',E') への**同型写像**とは、全単射 $F:V{\to}V'$ と全単射 $G:E{\to}E'$ の対 (F,G) で次を 満たすもの：$e:a{\to}b$ ならば $Ge:Fa{\to}Fb.$ その間に同型がある２つのグラフは同型である という。グラフ理論は、同型な２つのグラフを区別することに関心を持たない。あるグラフが持つ性質は、それと同型なグラフも持つ。

2.4.5 グラフと、その平面表示とは区別しなければならない。平面表示の方が無数の付加情報がある。その中で、もともとの (V,E) に込められた情報以外は　　　表示のために発生する非本質的な情報と見なす。

2.4.6 **例**　写像 $f:V{\to}V$ に対して、そのグラフ $G(f)$ をグラフと見るとき、各頂点の出次数は皆１である。逆に、どの頂点の出次数も１であるようなグラフは自己写像のグラフとなる。

2.5　対称グラフ

2.5.1 グラフ (V,E) が、「$a{\to}b$ ならば $b{\to}a$」 を満たすとき、対称であるといい、対称グラフと呼ぶ。対称グラフでは２本の矢印を書かずに矢印を省いて表示する。

2.5.2 **グラフの定める対称グラフ**　グラフ (V,E) から、グラフ $(V,\widetilde{E})$ が次のようにつくれる。

$$\widetilde{E} := \Big\{ \{\, a,b \,\} \;\Big|\; (a,b)\in E \Big\}.$$

これは単に矢印を省くだけ。

2.5.3 **対称グラフの別の表現**　グラフは、**頂点**(vertex) と**辺**(edge) の集まりからなる。ただし、辺は、要素数が 1 または 2 の、頂点集合。

１個の頂点からなる辺を**ループ**(loop) という。頂点 v を含む辺の数を v の**次数**(degree) という。

2.5.4 **鎖、サーキット**　次のような辺の有限列

$$\{\, v_1,v_2 \,\},\{\, v_2,v_3 \,\},\cdots,\{\, v_{n-1},v_n \,\}$$

を**鎖**(chain) といい、v_1,v_n をその**端点**という。同じ辺があらわれない鎖を**単純**鎖という。２つの端点が同じ鎖を**サーキット**という。

どの２点に対しても、それを端点とする鎖があるときに、グラフは**連結である**(connected) という。

2.6　グラフの行列記法

上にあらわれたような具体的なグラフを記述する方法はいろいろある。mathematica でのグラフの表現法は次の表示を用いている。

n を頂点の個数とするとき、グラフは成分が $0,1$ の $n\times n$ 行列 M で、

$$M_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{\, v_i,v_j \,\} \in E(G)$$

なるもので表示できる。M は対称行列となる。

2.7 マテマティカのデモ

2.7.1 電卓としての使い方

(a) 電卓として

- `2+2` とキーインし Enter キーを押す[3]と Out[1]=4 という結果が表示される。(mathematica 起動時には１分くらいかかる)。
- かけ算：`2 3`
- べき：`2^100`
- 割算：`12345/15`
- `123/21`の答えは分数であらわされる。
- `N[%]`で上の分数の小数展開が得られる。% は直前の結果をあらわす。
- `N[123/21]`によって上の２つの操作が１度で行える。
- `N[1/37,100]`により、小数点以下１００位まで表示できる。
- `FactorInteger[1234567]`:1234567 の素因数分解.
- `N[Pi,1000]`:円周率を１０００桁まで表示。

(b) 多項式の四則演算、因数分解

- `(a x + b)(c x + d)`: 多項式の積の入力。このままでは展開しない。
- `Expand[%]`:多項式の展開
- `Factor[%]`:多項式の因数分解。
- `Expand[(1+x)^100]`:べき
- `Factor[%]`

(c) リストの演算

- `a1={1,2,3,4,5}`: 文字 $a1$ の値を{1,2,3,4,5} に。
- `2+ a1`:各成分に $2+\bullet$ を作用.
- `2 a1`:各成分に $2\times\bullet$ を作用.
- `a1^2`:各成分に $\bullet^2$ を作用.
- `a2={1,x,x^2,x^3,x^4}`.
- `a1+a2`
- `a1 a2`
- `a1^a2`
- `Plus @@ a1`:成分の和をとる。
- `Times @@ a1`:成分の積をとる。

[3]Enter キーを押すと計算を始める

2.7.2 パズルの解法

- `<<DiscreteMath‘Combinatorica‘` 離散数学のパッケージの読み込み
- `g1=MakeGraph[頂点集合, 条件]`:グラフ $g1$ の設定
- `ShowGraph[g1]`:グラフの表示
- `ShowGraph[RankedEmbedding[g1,1]]`:グラフの表示 (頂点 1 を起点として順番に表示。

2.8 川渡りパズル：Mathematica による解法

2.8.0 パッケージの読み込み

```
<< DiscreteMath`Combinatorica`
```

2.8.1 状態の数え上げ

左岸に居るもの達 (0:人、1:犬、2:羊、3:キャベツ) の集合で状態を記述

2.8.1.1. 安全性を考慮しないで考えた状態の全体

```
全状態集合=Subsets[{0,1,2,3}]
```

2.8.1.2. 人 0 を含まないが{1,2}または{2,3} を含むときは危険である

```
危険 [状態_List]:= Not[MemberQ[状態,0]]
        &&
        (
          (MemberQ[状態,1] && MemberQ[状態,2])
        ||
          (MemberQ[状態,2] && MemberQ[状態,3])
        )
```

2.8.1.3. どの岸も危険な状態であってはいけない

```
安全 [状態_List]:=
        Not[危険 [状態]]
        &&
        Not[危険 [Complement[{0,1,2,3}, 状態]]]
```

2.8.1.4. 安全な状態

```
状態集合=Select[全状態集合, 安全]

{{}, {1}, {0, 1, 2}, {0, 2}, {2}, {0, 2, 3},
 {0, 1, 2, 3}, {1, 3}, {0, 1, 3}, {3}}
```

2.8.2. 移りあえる状態の組の判定

人は船を操作する-->0 の有無が変化する。

船には人以外に１だけ移動--> 一方が他方の部分集合で個数の差は２個以下

```
Clear[移動可能か]

移動可能か [前状態_List,ato_List]:=
        (*共通部分は 0 を含まない *)
        Not[MemberQ[Intersection[前状態,ato],0]]
        &&
         (*どちらかは 0 を含む *)
        MemberQ[Union[前状態,ato],0]
        &&
        (* 一方が他方の部分集合で個数の差は２個以下 *)
         (
                (* 前状態が後状態の部分集合 *)
                (Length[Complement[前状態,ato]]==0
                &&
                Length[ato]-Length[前状態]<=2 )
                ||
                (* 後状態が前状態の部分集合 *)
                (Length[Complement[ato, 前状態]]==0
                &&
                Length[前状態]-Length[ato]<=2 )
        )
```

2.8.3. 遷移グラフの作成

```
遷移グラフ=MakeGraph[状態集合, 移動可能か [#1,#2]&]
ShowLabeledGraph[遷移グラフ]
ShowLabeledGraph@RankedEmbedding[遷移グラフ,{7}]
```

2.9　宣教師－人喰族パズル：Mathematica による解法

2.6.0 パッケージの読み込み

```
<<  DiscreteMath`
```

2.9.1. 状態の数え上げ

2.9.1.1 左岸の宣教師数と人喰族数の対

```
人数対=Flatten[Table[{i,j},{i,0,3},{j,0,3}],1]
```

2.9.1.2. 両岸での条件

```
片岸条件 [{宣教師数_, 人喰族数_}]
      := (宣教師数==0)
         ||
         ( (宣教師数>0)&& (宣教師数 >= 人喰族数))

両岸条件 [{宣教師数_, 人喰族数_}]
      := 片岸条件 [{宣教師数, 人喰族数}]
         &&
         片岸条件 [{3-宣教師数,3-人喰族数}]
```

2.9.1.3 状態集合

```
安全人数対= Select[人数対, 両岸条件 [#]&]

状態集合=Join[
                Map[Append[#, 左]&, 安全人数対],
                Map[Append[#, 右]&, 安全人数対]
             ]

{{0, 0, 左}, {0, 1, 左}, {0, 2, 左},
  {0, 3, 左}, {1, 1, 左}, {2, 2, 左},
  {3, 0, 左}, {3, 1, 左}, {3, 2, 左},
  {3, 3, 左}, {0, 0, 右}, {0, 1, 右},
  {0, 2, 右}, {0, 3, 右}, {1, 1, 右},
  {2, 2, 右}, {3, 0, 右}, {3, 1, 右},
  {3, 2, 右}, {3, 3, 右}}
```

2.9.2. 移動可能か

2.9.2.1 船上条件

```
船上条件[宣教師数_, 人喰族数_]
          := 宣教師数+人喰族数<=2
```

2.9.2.2 移動可能か

```
Clear[移動可能か]

移動可能か[{_,_,x_},{_,_,x_}]:=False
移動可能か[{a_,b_,左},{c_,d_,右}]
        :=a+b > c+ d
          &&
          a >=  c
          &&
          b>= d
          &&
          船上条件[a-c,b-d]
移動可能か[{a_,b_,右},{c_,d_,左}]:=移動可能か[{c,d,左},{a,b,右}]
```

2.9.3. 遷移グラフの作成表示と

```
遷移グラフ=MakeGraph[状態集合,移動可能か[#1,#2]&]
ShowLabeledGraph[遷移グラフ]
ShowLabeledGraph[RankedEmbedding[遷移グラフ,{1}]]
```