理学部数学科2000前期 計算数学１[1]

担当：辻下　徹[2]

目 次

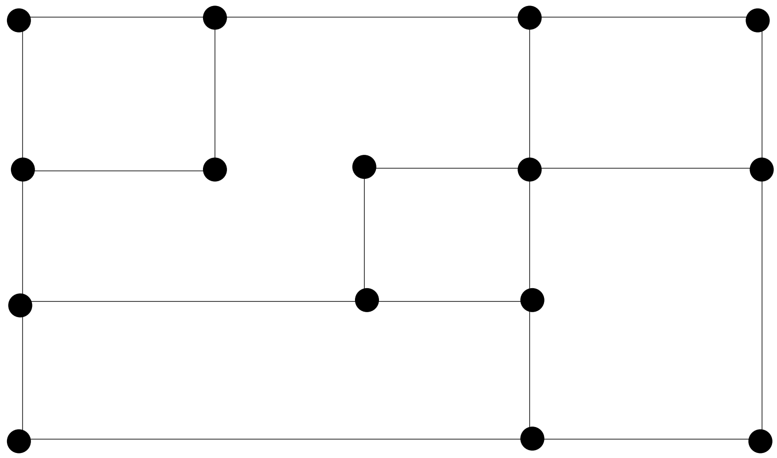
[1]URL:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html`
質問提出アドレス:`cs2000@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp`

[2]Email:`tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp`,
Homepage:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/`

4　第４回：木グラフとその応用

4.1　一方通行化問題

次のような道を持つ町のすべての道を一方通行にして、しかもどの２地点の間をも行き来できるようにすることが出来るか？



4.2　グラフの言葉による定式化

グラフ (V, E) の辺の有限列 $\gamma = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ が、条件「各辺 e_i の終点が次の辺 e_{i+1} の始点となる」を満たすとき**道**(path) と呼ぶ。最初の辺 e_1 の始点を道 γ の**始点**といい、最後の辺 e_n の終点のこと道 γ の**終点**という。始点と終点が同じ道を**サイクル**という。

グラフ (V, E) が**強連結**であるとは、どの２頂点 a, b に対しても、a を始点,b を終点とする道が存在することをいう。

上の問題は次のように言い換えることができる。

> 対称グラフが与えられたとき、各辺に向きをつけて結果的に強連結なグラフと成るようにせよ。

4.3　解けるための必要十分条件

定理.　γ を連結対称グラフとする。γ に強連結な向き付けを与えること（すなわち、各辺に向きを付けて強連結なグラフにすること）ができるための必要かつ十分な条件は、γ が橋を持たないことである。

ただし、「辺 $\{a,b\}$ がグラフ γ の**橋**である」の意味は、γ からその橋を除去すると、グラフが連結ではなくなる、ということである。

橋があるときに、強連結な向き付けがないことは明らかである（なぜか、考えてみよ)。

逆に橋がないときに、強連結な向き付けを構成する方法を以下与える。

4.4　木

4.4.1　定義

次のようなグラフを**木グラフ**(tree) という：

- **根**(root) と呼ばれる入点（つまり出次数がゼロ）があり,
- 根以外の頂点から根への道が丁度一本ある。

ことを言う。

$c{\to}p$ のとき（つまり、(c,p) が辺のとき)、

頂点 p を頂点 c の**親**頂点といい

頂点 c を頂点 p の**子**頂点という。

根以外の頂点には丁度一つの親頂点がある（なぜか？)。子頂点は必ずしも存在しない. 子頂点を持たない頂点を**葉**(leaf) と呼ぶことがある。

頂点数が有限の木を有限木といい、各頂点の出次数が有限である木を有限分岐木という。

4.4.2　木の図示法

樹状図

入れ子図
- 箱の平面配置図（詳しくは後述）
- 区間の直線配置

記号表示
- Spencer-Brown 式
- 括弧式（リスト）表示　（詳しくは後述）

4.4.3　実世界に現れる木の例

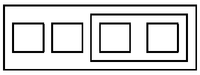
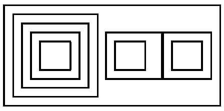
1. トーナメント（２分木 (binary tree))
2. 生物の系統樹
3. 命令系統［軍隊組織、官僚組織］
4. ガスや水道の配管
5. 分類システム（住所、コンピュータのファイルシステム、図書分類）
6. 数式

4.4.4　木構造の入れ子表示法の例

1. 葉には空箱を対応させる。
2. 頂点 v の子の各々に箱 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ が対応しているとき、v にはこれらを入れた箱 $\boxed{s_1, s_2, \cdots, s_m}$ を対応させる。

この操作により、木のすべての頂点に入れ子の箱唯が対応する。根に対応する箱を，この木の入れ子箱表示という。入れ子箱表示から木が再構成できる。

練習問題　次の入れ子箱に対応する木を求めよ。

4.4.5　木構造の記号列表示法の例

1. 葉には記号 ● を対応させる。
2. 頂点 v の子の各々に記号列 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ が対応しているとき、v には $(s_1 s_2 \cdots s_m)$ を対応させる。

この操作により、木のすべての頂点に唯一つの記号が付く。根に対応する記号列を，この木の標準的記号表示という。記号表示から木が再構成できる。

練習問題　次の記号表示から樹状図を描け。

1. ((● ● (●))(●●)(●))
2. (((((●●)●)●)●)●)

4.4.6　木の頂点の標準的ラベル付け

各頂点の子の数は有限であるような木（これを**有限分岐木**という）に対して、各頂点に数のリストを次のように対応つけることができる。

1. まず、各頂点の子に 1 から通し番号付ける。
2. 根には空リスト [] を対応させる。
3. $[n_1, \cdots, n_k]$ というラベルのついた頂点の m 番目の子には $[n_1, \cdots, n_k, m]$ というラベルと付ける。

4.5　木の基本的性質

(1)　木は単純サーキットをもたない。（従ってサイクルを持たない。）

(2)　任意の 2 頂点の間に、唯一つの単純な鎖がある。

(3)　頂点の数は辺の数より 1 だけ多い。

(4) 新しい辺を一つでも付け加えると、サーキットができる。ただし、新しい辺は、木の辺の向きを逆にしたものではないとする。

(5) 木の辺を一つでも取り除くと、連結ではなくなる。

定理 4.1 グラフが木であるための必要かつ十分な条件は、連結であって単純サーキットをもたないものである。

（証明を考えよ。）

このことから「木であるという性質」は、グラフを対称化して得られる無向グラフの性質であることがわかる（どうしてか？）。なお、単純サーキットを持たない連結無向グラフを木と呼ぶこともある。

なお、木グラフのどの頂点をとっても、それを root とする木を、辺の向きを適当に変えて、つくることができる（どうすればよいか？）。

4.6 展張木

無向グラフ Γ の**展張木(spanning tree)** とは、Γ を対称有向グラフと見たとき、その部分グラフであって木であるものの中で極大なものをいう。

定理 4.2 連結な無向グラフ (V, E) に対して、次の方法で構成される部分グラフ (V, T) は展張木となる。

展張木の構成法. （depth first search の応用）

展張木の辺集合 T を求める。

1. まず、p に番号 0 を付ける。$n := 0, T := \emptyset$ とする。
2. 次を繰り返す：
   (a) 無番号の子供を持つ番号付き頂点がない場合：終了。
   (b) そうでないとき：無番号の子供を持つ番号付き頂点の中で、番号が最大のもの v をとり、その子供で無番号なものの一つ w に $n+1$ という番号を付け、$n := n+1$, $T := T \cup \{ (v, w) \}$ とおく。

4.7 一方通行化問題の解法

Γ を橋を持たない連結無向グラフとする。

1. 上記の方法で、展張木を作る。
2. 得られた展張木に属する辺には、番号の小さい方から大きい方へ向きをつける。
3. それ以外の辺は、番号の大きい方から小さい方へ向きをつける。

定理 4.3 前節のアルゴリズムにより、橋のない対称グラフに、強連結な向きづけが与えられる。

証明には次の補題を使う。

補題 4.4 *depth-first-search* で構成された木を T とし、構成時につけられた番号で頂点をあらわすとき、次の性質がなりたつ。

(i) w が v の子孫ならば $w > v$（s から g へ道があるとき、s を g の子孫という。）.

(ii) どの頂点についても、その子孫の全体の番号は通し番号になっている。

(iii) p の子孫 a と、p の子孫ではない x が、もとのグラフの辺の端点ならば、$x < p$ である。

証明. (i) は番号の付け方からあきらか。

(ii) と (iii) の証明:頂点 p を任意に一つとる。p の子孫のあいつづく列を $p+1, p+2, \cdots, r$ とし、$r+1$ は p の子孫ではないとする。r の次に行う depth-first-search の作業は、他の選択肢の残っている頂点の中で番号が一番大きなもの q に戻り、他の選択肢である辺（すなわちもとのグラフの辺でまだ向きをつけてないもの）の一つを選び、その辺の他の端点に $r+1$ という番号をつける。したがって、$r+1$ は q の子となる。さて、もしも $q > p$ ならば、$r > q$ だから仮定から q は p の子孫、従って、$r+1$ は p の子孫となり矛盾。ゆえに、$q < p$ である。

$r+1$ のあとの depth-first-search において、p の子孫が現れることはない。というのは、もしも $r+1$ 以後の頂点 t と p-子孫 s が未処理辺によって繋がっていたとすると、$r+1$ に達する以前に t は処理されていなければならなかったはずだから。

以上により、$t > r$ ならば t は p の子孫ではないことがわかり (ii) が示された。同時に、頂点 a が p の子孫、x は p の子孫ではなく、$\{ a, x \}$ がもとの辺とする。このとき $x < p$ でなければならないこともわかった。 証終

定理の証明 さて、任意頂点から、それよりも番号の小さい頂点への道があることを示せば良い。

p を任意の頂点とし p の子孫の全体を $A := \{ p, p+1, \cdots, q \}$ とする。$r \to p$ という T の辺 e が唯ひとつ存在するが、Γ には橋がないという仮定より A の元 a と A^c の元 x を端点とする辺が Γ にはある。すると上の性質より、$x < p$ となる。従って、もとのグラフの鎖 $p - a - x$ で p から、番号の若い x へ戻ることができることがわかる。 証終

演習問題 この解法を実際の例で確かめよ。

4.8 前回の質問と回答

[**Q4-1**] グラフの種類というのは、典型的なもので何種類位あるのですか？PS いろんな人の質問の答えは、私にとっては、とても役に立っています。

[**A4-1**] 何をしようとするかに応じて、グラフの特別なクラスを限定することはいくらでもできますから、「典型的な種類」というようなものはありません。

重要な役割を果たすものとしては、木グラフ、関数グラフ（すべての頂点の出次数が 1)、正則グラフ（どの頂点の次数も同じもの)、2 部グラフ（頂点が 2 種類に分かれ、辺は異種の頂点を結ぶもの)、などがあります。

[**Q4-2**] メールの送りかたがわかりません。

[**A4-2**] 演習の時に教えます。

[**Q4-3**] 授業の進め方に疑問がある。もっと、その日、やる内容に時間をさいてほしい。質問に一つ一つ答えているのは流れがわかりづらいです。この授業の目的が見えずらいです。

[**A4-3**] 授業の目的は 2 重です。一つは離散数学の基礎的なことを学習することですが、もう一つは「問題意識を持ちながら」学習することを学習してもらうことです。

[**Q4-4**] 演習には出れないのですが、自分で進めておくべきなのですか。僕はパソコン自体がよくわからないのですが。

[**A4-4**] パソコンの原理は難しいですが、パソコンの操作自体は簡単ですので覚えてください。計算機演習を取るようにしてください。

[**Q4-5**] 一方通行化問題の解法の定理はどういった意味のものなのですか？

[**A4-5**] きょうの資料に書きました。

[**Q4-6**] 個人で Matematica を入手するにはどうすればいいのでしょうか？

[**A4-6**] 学生版が生協で販売されています。

[**Q4-7**] 「分割できる $\rightarrow$ 連結でない」ということがわかりません。また、「分割できる $\Leftarrow$ 連結でない」はどうなのですか。

[**A4-7**] 頂点が A, B 分割できれば、A の頂点と B の頂点が結べません。

[**Q4-8**] 今まで出て来たもの（サーキットや資料中の木グラフ）のコンピュータによる問題解決は、基本的には、全ての状況を数えが得るという解法ばかりなのでしょうか。僕には「ちょっとしたくふう」をするけれども、結果的には、全てを数え上げるだけのような気がするのですが。確かにコンピュータのメリットを最大に活かしているとは言えますが。頂点数が有限でない場合などはどうするのでしょうか。もしくは、とても多い場合にも（抽象的な表現ですが）方向性などは日とが理解する方法はないのでしょうか。

[**A4-8**] 一般的な方法である点に意義があります。個々の例ごとには、例の特殊性を利用して解ける場合が多いです。

[**Q4-9**] 4.1 の一方通行化問題は、ただの連結であり強連結なものではないのですか. 一方通行化問題は可能であるためには、サイクルができている必要があると思います。しかし、ある 2 点 A, B は $A \to B \to A$ と逆戻りできないため、どこかを取り除くと、一方から他方へのみしか行けません。つまり橋を多数持ちます。つまり「一方通行 $\to$ 強連結ではない」のでしょうか。

[**A4-9**] 一方通行でも大回りして戻ることができます。

[**Q4-10**] 鎖をさがす方法はどう使いわけるのか. それぞれの探し方の利点・欠点は何ですか？

[**Q4-11**] 有限力学系でないものはどのようなものがありますか。また、Mathematica でそのようなものを計算することができますか。有限力学系定義から有限力学系でないものは、現在の状態から遷移した後の状態を表す関数がないものということになると思うのですが、それにはどのようなものがあるのでしょうか。例えば天気予報は空気の流れなどが有限力学系でないから、正確に予測することができないと考えてよいのでしょうか。また、Mathematica ではそのような計算は不可能でしょうか。

[**A4-11**]「有限力学系でないもの」は様々なものを意味します。フレーム問題といいますが、有限力学系を含むどのような全体の中で考えているかによります。たとえば力学系の中で考えるならば、無限力学系が考えられます。グラフの中で、どの頂点の出次数も 1 である、というものとして考えれば、出次数が様々なものになります。これは非決定的力学系と呼ばれることもあります。

[**Q4-12**] 言い回しの問題かも知れませんが、グラフ (V, E, s, t) の 2 頂点 $v_1, v_2 \in V$ について

$$v_1, v_2 \text{が (直接) 連結} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists e \in E\ s(e) = v_1, t(e) = v_2 \text{または} s(e) = v_2, t(e) = v_1 \text{の少なくとも一方が成立}$$

とすると、「$\forall v \in V\ [v, v$ は連結 $]$」は必ずしも言えない様な気がします。それでは極めて気分が悪いのですが。

[**A4-12**] 気分が悪いのであれば定義の方が折れるべきです。たとえば

$$v_1, v_2 \text{が (直接) 連結} \overset{def}{\Longleftrightarrow} v_1 = v_2 \text{または} \exists e \in E\ s(e) = v_1, t(e) = v_2 \text{または} s(e) = v_2, t(e) = v_1 \text{の少なくとも一方が成立}$$

とすればよい。

[**Q4-13**] 「人食い族」の問題で、人食い族と宣教師の数が多くなっても解はあるのか。また、そのとき必要なステップ数はどの程度のオーダーで増えるのか？

[**A4-13**] 4 人ずつでは解はありません。前々回の mathematica のプログラムを使えばすぐに確認できます。

[**Q4-14**] Mathematica 以外に同じような機能を持ったソフトはないのですか？ Mathematica は確かに便利なソフトだと思うのですが、プログラムを作る際に、パソコン用語（英語）を使わないとプログラムを完成できません。例えば、日本語でプログラムを作ったり実行させたりするものがあるとより便利だと思っています。そういったものがあったら紹介してください。

[**A4-14**] 数学でも、日本語以外の文字を使いますね。その程度の「パソコン用語」ではないでしょうか。なお、日本語で書くプログラミング言語もありますが、あまり使われません。

[**Q4-15**] テキスト内の 4.2 の解法とは一方通行化問題の解法ですよね？そこの定理はどういった意味なのか良くわからないのですが。問題を解く際に 4.2 の定理というものを考えても、意味がわかりません。この定理を使わなくても問題はできたのですが？

[**A4-15**] 解けるための判定条件を与えるものです。

[**Q4-16**] 「γ が強連結な向き付けを持つ」とはどういうことですか？

[**A4-16**] 資料に書きました。

[**Q4-17**] 離散力学系はカオスで扱われる力学系と同じ意味ですか。これらは力学と関係があるのですか？

[**A4-17**] 状態空間と状態遷移規則で与えられるという点では同じ意味ですが、状態空間が離散的である点が違います。また、力学は、特別な力学系です。

[**Q4-18**] $V_1 \simeq V_2, X_1 \simeq X_2$ ならば、$V_1^{X_1} \simeq V_2^{X_2}$ か？

[**A4-18**] そうです。

[**Q4-19**] 授業でやっている事そのものはわかるが（たぶん理解していると思う）、何が大事で何が応用できるか、等の何を表すためにグラフを書くのかがわかりません。有向グラフを書き、それはどのように役立つのか等についての具体的な例、発展例が知りたい。「連結」「連結でない」という事自体は理解できるが、その事はどのような事にどのように使えるのか。何で「連結」と「連結でない」区別をいうことが必要なのか、がよくわからない

[**A4-19**] どういうものでも、適切に視覚化するのは大きな意味があります。有向グラフもその一つです。連結かどうかは、同じ連結成分に入っているかどうか、として、多くの問題が表現できます。

[**Q4-20**] Mathematica を使っても一瞬では計算できないことがありますか？

[**A4-20**] ほとんどがそうです。

[**Q4-21**] 関数型言語とはどういうことですか？mathematica はどのような点で関数型言語なのですか。関数型の他には一体とんなものがあるのですか？述語を定義すると前回言っていた時がありましたが、これと関係がありますか？

[**A4-21**] プログラムが関数の定義式によって与えられ、実行は関数の値を求める、という形式のものを関数型言語といい、Lisp から始まり ML など、理論的計算機科学で使われる言語の主流であるように見える。ほかには、手続き型言語である BASIC, FORTRAN, Pascal, C 、論理型言語 PROLOG などがある。

[**Q4-22**] どこから今回新たにやることなのか、どこまでが前回の復習なのか、わかりにくいのではっきりしてほしいです。

[**A4-22**] 今後配慮します。

[**Q4-23**] この授業でいろいろな言葉が出てきましたが（連結、グラフ、鎖..）それらを使って解くのに、mathematica を使うのですか。手で解く上であまり使っていない気がしますが、手で解く際には役に立つようなことはあるのですか。この授業の進め方への感想にもなりますが、あまり「例」を解いたりすることがないと思います。だから「連結、有向グラフ...」といったものの定義は調べればわかるがいつ、どう使い、それによってどういうことがいえるのか、といったことがわかりません。

質問に答えるのは短時間にして、少しでも授業を進めてくれなければ、書くネタがなかなか見つからないと私は思います。

[**A4-23**] 手で解くとき何をしているかを表現することは色々な意味で重要です。「役に立つかどうか」という切り口で考えることではないと思います。

私には新しい方式なので、授業の進め方がまだ試行錯誤があります。今後も意見をお聞かせください。

[**Q4-24**] mathematica でやった自習を自由レポートとして提出してもらうのも我々受講者が mathematica を覚えるきっかけにもなると思うのですが。

[**A4-24**] 検討しています。

[**Q4-25**] 木は可縮ですか。

[**A4-25**] はい。

[**Q4-26**] 出次数 $= 0$ は、力学的に言うと、物体がそこに収束するということと同じですか？また、入次数 $= 0$ は、物体が発散する点と同じですか？有向グラフにおいて、出次数 $= 0$ の頂点は、そこから別の序っ体に推移しないから、力学的には「物体が収束する点」（安定な点）に似ていると思うのですが..。また、入次数 $= 0$ の点は、別の状態からその点に推移することがないから、「物体が不安定な点」というように考えてもいいのでしょうか?

[**A4-26**] グラフの辺が何を差し示すと見るかに依存しま。

[**Q4-27**] 授業で配付する「マテマティカの演習のテキスト」はマテマティカで作っているのですか・

[**A4-27**] TEX を使っています。

[**Q4-28**] breadth-first search と depth-first search の違いがあまりよくわかりません。

[**A4-28**] 講義で説明します。

[**Q4-29**] 連結であるという考え方は理解できましたが、「連結でない → 分割できる」という時の分割できる、という考えがいまいち[3]わかりにくかったです。mod の意味がよくわかりません。

[**A4-29**] $m \bmod n$ は m を n で割った余りを表します。実際には $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ の要素を表します。

[**Q4-30**] ２点を結ぶ鎖の探し方には２つありましたが、点の数が少ない場合は、１の方法のほうが計算量が少なくなるのでしょうか？それぞれの方法がする場合を教えてください。

[**A4-30**] 点の数が少ない場合には余り違いはありません。捜す鎖が長いことが予想される場合には、breadth-first search は明らかに効率が悪いだろう

---

[3]「いまいち」はスラングですから「いま一つ」