理学部数学科 2000 前期 計算数学１[1]

担当：辻下　徹[2]

目 次

[1] URL:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html`
質問提出アドレス:`cs2000@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp`

[2] Email:`tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp`,
Homepage:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/`

5　有限力学系

機械は明確な規則に従って動作するものという意味で使うことがある。数学的には、これは

- 「状態空間」X （機械が取りえる状態の全体）
- 「状態遷移規則」$\tau : X \to X$（状態がどう変化するかを与える規則）

によって記述される。自然科学は、自然が機械であることを作業仮説として、どういう機械かを調べようとする。ニュートン力学では、質点の「状態」は位置と速度で記述できるので、6 個の実数の組で記述できる。従って状態空間は $X = \mathbf{R}^6$ である。状態遷移は微分方程式で表されるが、これは「無限小変換」という遷移規則と見ることができ、やはり上の形式で捉えられている。

この節では、力学系という数学的概念装置の中で最も原始的な「有限力学系」を説明しよう。力学系の主要な概念の多くはまずここで粗削りな姿で登場する。

5.1　定義

1. 集合 X と写像 $\tau : X \to X$ の組 (X, τ) を**離散力学系**と呼ぶ。X を**状態空間**、X の元を**状態**、τ を**状態遷移関数**と呼ぶ。
   X が有限のとき、これを**有限力学系**という。
2. 離散力学系 (X, τ) は平面上のグラフとして次のように表示できる：X の元ごとに点を打ち、各 $x \in X$ に対して、x から τx への向きの付いた線分を引く。これは、頂点の出次数がすべて 1 である有向グラフに他ならない。

5.2　例

数論的な力学系

1. $X := \mathbf{Z}/p.\mathbf{Z}, \quad \tau(x) := x^2 (\mathrm{mod}\, p).$
   図 1, 図**??**は おのおの $p = 11, 13$ の場合のグラフ表示である。

循環小数　p を素数, $X_p = \{\, 1, 2, \cdots, p-1 \,\}$, τx を $10x$ を p で割った余りとすると、(X_p, τ) は力学系となる。

例：

p	サイクル	循環小数
7	$1 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{4} 2 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{8} 4 \xrightarrow{5} 5 \xrightarrow{7} 1$	$1/7 = 0.142857142858\ldots$
13	$1 \xrightarrow{0} 10 \xrightarrow{7} 9 \xrightarrow{6} 12 \xrightarrow{9} 3 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{3} 1$ $2 \xrightarrow{1} 7 \xrightarrow{5} 5 \xrightarrow{3} 11 \xrightarrow{8} 6 \xrightarrow{4} 8 \xrightarrow{6} 2$	$1/13 = 0.076923076923\ldots$ $2/13 = 0.153846153846\ldots$
17	$1 \xrightarrow{0} 10 \xrightarrow{5} 15 \xrightarrow{8} 14 \xrightarrow{8} 4 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{3} 9 \xrightarrow{5} 5 \xrightarrow{2}$ $16 \xrightarrow{9} 7 \xrightarrow{4} 2 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{1} 13 \xrightarrow{7} 11 \xrightarrow{6} 8 \xrightarrow{4} 12 \xrightarrow{7} 1$	$1/17 = 0.0588235294117647\,05\ldots$

練習問題　　$p = 23, 29, 31$ に対するグラフを書け。

Collaz の問題.　数 n が偶数のとき 2 でわり、奇数の時は 3 倍して 1 を加える。どのような自然数から出発してもこの操作を繰り返すとやがて 1 になるか？(未解決)

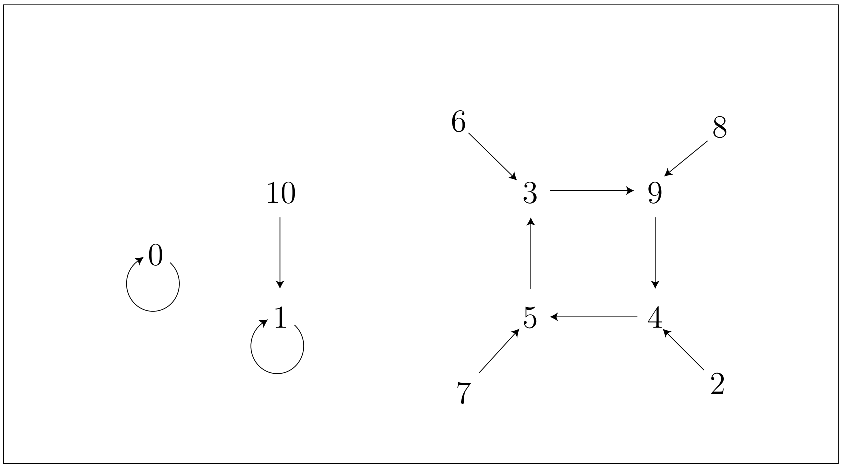


図 1: 有限力学系 ($x \mapsto x^2$ (mod11))

5.3　有限力学系に関する基本概念

- $x \in X$ の軌道 $O(x)$ とは集合 $\left\{ \tau^i x \;\middle|\; i = 0, 1, 2, \cdots \right\}$.
- $x \in X$ が**周期点**であるとは、$\tau^p x = x$ を満たす $p > 0$ があることをいう。このような p の中で最小のものを x の**周期** という。
- $\tau x = x$ を満たす x を**固定点**という。これは周期 1 の周期点である。
- $Y \subseteq X$ が**部分力学系**であるとは、$\tau Y \subseteq Y$ を 満たすものをいう。軌道は部分力学系である。周期点の軌道は部分力学系であるが、これを**サイクル**と呼ぶ。サイクル γ と交わる軌道は γ を含む。$O(x) \bigcap \gamma \neq \emptyset$ であるような x の全体を $B(\gamma)$ 書き、サイクル γ の**鉢**(basin) という。
- ２つの離散力学系 (X_i, τ_i) $(i = 1,\ 2)$ に対し、写像

$$\alpha : X_1 \rightarrow X_2$$

  が $\alpha \circ \tau_1 = \tau_2 \circ \alpha$ を満たすとき、**力学系準同型**であるという。
- α が全単射であるとき**同型写像**といい、(X_1, τ_1) と (X_2, τ_2) とは**同型である**という。
- ２つの離散力学系があると、それらのグラフを並べたものは、一つの離散力学系のグラフと考えることができる。これを、力学系の**直和**という。

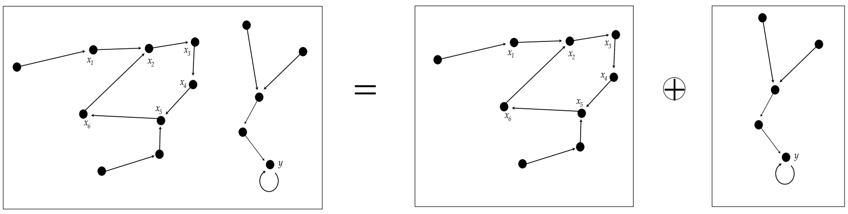


図 2: 直和

力学系は、空でない2つの力学系の直和と同型にはならないとき**既約**であるという。

5.4 有限力学系の構造定理.

1. 有限力学系は既約な部分力学系の直和と同型である：
2. 有限な既約力学系には
   - 唯一つの周期力学系が部分力学系として含まれ（これを**アトラクタ**という）、
   - どの状態から出発してもやがてはこのアトラクタに達し、周期的な変化をする。（サイクルに属さない状態を**一過的**(Transient) な状態という。）

証明の概略. (X,τ) を与えられた有限力学系とする。

1. X の周期点の全体を X_o とする。
2. X_o には $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} O(x) \ni y$ により同値関係が定義される。それによる同値類への分割を
$$X_o = \coprod_i X_o^i$$
とかく。
3. $X^i := \left\{ x \;\middle|\; O(x) \bigcap X_o^i \neq \emptyset \right\}$ とおくと、
$$X = \coprod_i X^i$$
となる。これが求める直和分割である。
4. Y を X の既約な部分力学系とすると、$Y \subseteq X^i$ となる i が唯ひとつ存在する。これより、直和分割の唯一性がわかる。

6　オートマトン

6.1　背景

離散力学系の遷移規則は時間によらない。しかし、実在する対象が時不変な遷移規則で表現できることはない。少なくとも、その対象に作用しているほかの対象にも依存する。このような対象を表現するときにはパラメータ付き力学系が適している。

これには**オートマトン**という名前がついている。状態空間・信号集合がともに有限集合であるものは**有限オートマトン**と呼ばれ、計算理論 (Theory of computing) で基本的な役割を果たす。チューリング機械も、無限の記憶装置と有限オートマトンの組み合わせとして記述される。

6.2　定義

２つの集合 Q, Σ と写像 $\tau : Q \times \Sigma \to Q$ の３つ組 $M = \langle Q, \Sigma, \tau \rangle$ のことを**オートマトン**といい、構成要素それぞれは次のように呼ばれる。

- 集合 Q は**状態空間**、その元は**内部状態**,
- 集合 Σ は**入力信号空間**、その元は**入力信号**,
- τ は**状態遷移写像**.

状態遷移写像による $\langle q, \sigma \rangle$ の値を単に $q.\sigma$ とも書く。オートマトンという数学的概念の使い方は次の通り：

- 状態空間は、ある対象の内部状態の全体を記述し、
- 入力信号空間は、その対象への働きかけ方の全体を記述し、
- 状態遷移写像は、内部状態 q のときに信号 σ を入力したときの新内部状態 $\tau(q, \sigma)$ を記述する。

オートマトン $M_i = (Q_i, \Sigma_i, \tau_i)$ $(i = 1,\ 2)$ が**同型である**とは、２つの全単射 $f : Q_1 \to Q_2,\ g : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ があって、

$$f(\tau_1(q, \sigma)) = \tau_2(f(q), g(\sigma))$$

が任意の $q \in Q_1, \sigma \in \Sigma_1$ について成り立つことをいう。

6.3　パラメータ付きの離散力学系としてのオートマトン

オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \tau \rangle$ を一つ考えよう。入力が一定ののときは、離散力学系として振る舞う。もうすこし詳しくいえば、入力の一定値を $\sigma \in \Sigma$ とするとき、離散力学系 $\langle Q, \tau_\sigma \rangle$ を得る、ただし、

$$\tau_\sigma(q) := \tau(q, \sigma).$$

6.4　ラベル付グラフによるオートマトンの図示

オートマトンは辺にラベルのついたグラフとして表示できる。先週やったように、各入力信号 σ ごとに得られる力学系は有向グラフを定める。これらのグラフを合わせたものを、オートマトンのグラフ表示という。ここで、辺がどの信号に対するものかを示すために、信号をラベルとして辺に書いておく。

ラベル付き有向グラフは、数学的には、$\langle V, L, \lambda : L \to V \times V \rangle$ として与えられる。ここで、L はラベル集合、$\lambda(\ell) = (v, w)$ のとき、辺 $v \to w$ にラベル ℓ がついていると考える。すると、オートマトン $\langle Q, \Sigma, \tau \rangle$ に対するラベル付きグラフは

$$\langle Q, Q \times \Sigma, \widetilde{\tau} : Q \times \Sigma \to Q \times Q \rangle$$

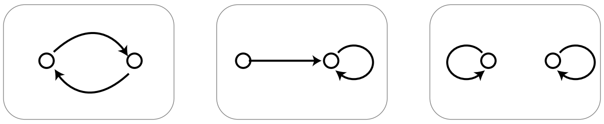
ただし、

$$\widetilde{\tau}((q, \sigma)) = (q, \tau(q, \sigma)).$$

6.5　有限オートマトンの数え上げ

$|Q| = 2, |\Sigma| = 2$ の非退化オートマトンは４種類ある。ただしオートマトンが非退化だとは、異なる入力信号は違う変化を引き起こすことをいう。つまり、$\forall q \in Q[\tau(q, \sigma_1) = \tau(q, \sigma_2)]$ ならば $\sigma_1 = \sigma_2$.

数えあげ方．まず、各入力の定める有限力学系は次の３種類。



これを組み合わせると図３のようになる。

6.6　問題

$|Q| = 3, |\Sigma| = 2$ のオートマトンを数え上げよ。ただし、同型なものは同じとみなす。（ヒント：約８０個ある）

6.7　出力付きオートマトン

有限オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \tau \rangle$ に出力写像

$$\lambda : Q \times \Sigma \to \Lambda$$

を与えると，記述力が高まる．グラフでは，$q.\sigma = q'$, $\lambda(q, \sigma) = \ell$ であるとき

$$q \stackrel{\sigma/\ell}{\to} q'$$

と書く.

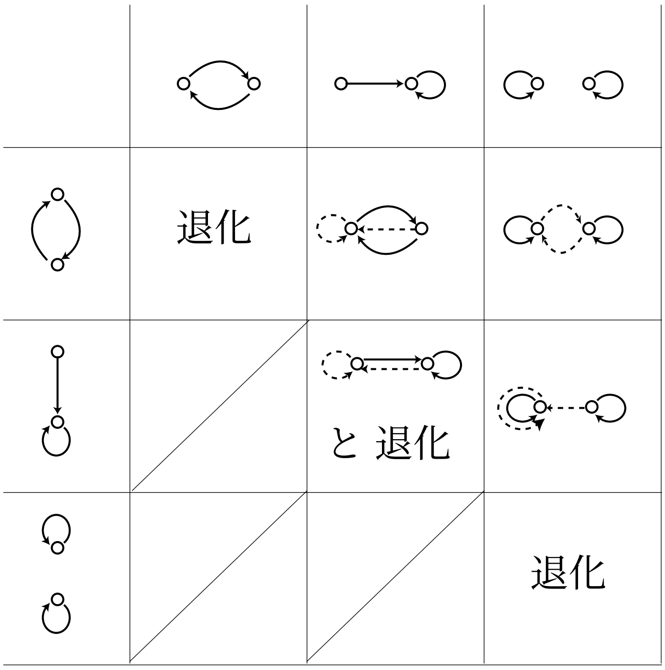


図 3: 2 内部状態 2 入力信号の有限オートマトンの分類

記憶機械 これは、2 つの内部状態 a, b を持ち、入力 0 は内部状態を a の変え、入力 1 は内部状態を b に変える。内部状態が a, b に応じて各々0, 1 を出力する。

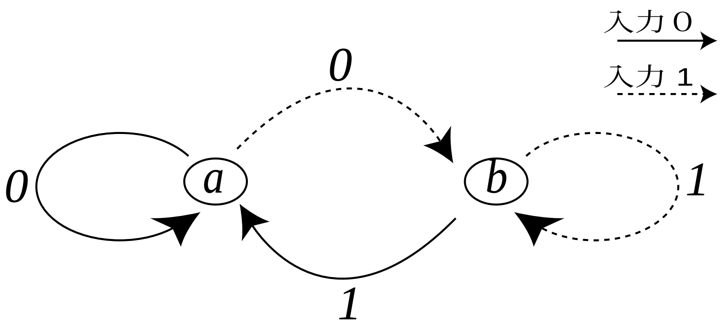
この機械の動作の解釈：入力を記憶し、直前の入力を出力する。

$\Sigma = \Lambda = \{ 0, 1 \}$, $Q = \{ a, b \}$,

τ	a	b
0	a	a
1	b	b

λ	a	b
0	0	1
1	0	1

これは次図であらわされる。



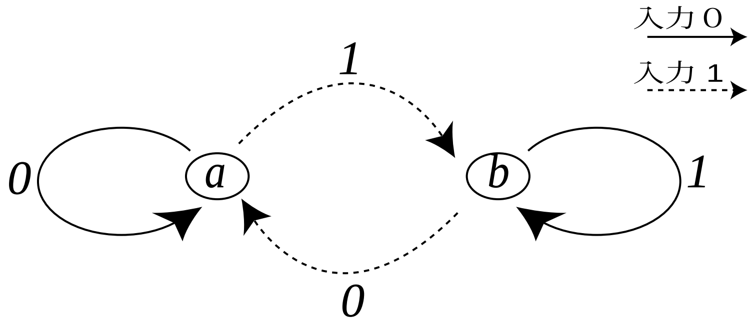
parity counter 入力 0 は内部状態を変えず、入力 1 は内部状態を入れ替える。従って、初期内部状態が a とすると、過去の入力の中にある 1 の個数が偶数か奇数かに応じて a, b という内部状態になる。

このオートマトンは、初期内部状態 a から 0, 1 の入力が続くとき、その時点も含めて過去に入力された 1 の個数の偶奇に応じて 0, 1 を出力する。

τ	a	b
0	a	b
1	b	a

λ	a	b
0	0	1
1	1	0

これは次図であらわされる。



加算機 このオートマトンは、２つの入力端子を持ちそれぞれに同期して入ってくる時系列を２進数とみなしたとき、その和が時系列として出力される。例えば、

- $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0$
- $1, 1, 1, 0, 0, 0, 0$

が入力されるとき（すなわち、順番に $01, 11, 01, 10, 00, 10, 00$ が入力されるとき）これらを逆に並べた 0101010,0000111 という２進数と見たときの和 0110001 が下の桁から時系列 $1, 0, 0, 0, 1, 1, 0$ として出力される。

$\Sigma = \{ 00, 01, 10, 11 \}$, $L = \{ 0, 1 \}$, $Q = \{ a, b \}$. 次の表の中身は遷移 / 出力を意味する。内部状態は、繰り上がりの有無を記憶している。

例えば、b のときに 01 が入力されると、繰り上がりがあるので、それと入力の 1 が加算されて 10 となるので、下１桁の 0 が出力されて繰り上がりがのこるので状態は b のままになる。

	a	b
00	$a/0$	$a/1$
01	$a/1$	$b/0$
10	$a/1$	$b/0$
11	$b/0$	$b/1$

Tsetlin のオートマトン　2 種類の行動 (a, b) を行うオートマトンが、行動に応じて「賞 (1) 罰 (0)」を受けるとする。このとき、罰を避けるために行動を変更する戦略は様々である。そういう戦略をオートマトンで表現できる場合がある。一番単純には次のようなものがある。

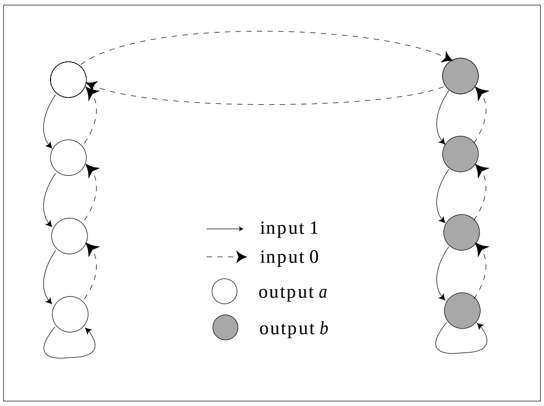


図 4: 単純な戦術

もう少し込み入った戦術としては次のようなものがある。

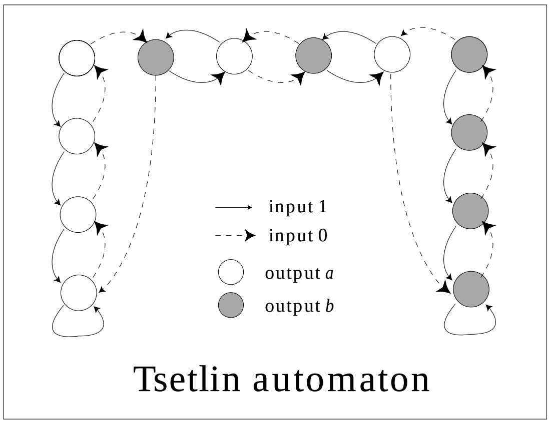


図 5: 慎重な戦術

第３回分

[**Q4-31**](s980008) P.7 の定理は、連結ではなくなることを「強連結」である、ということをいっているのですか？言葉としてそうならば覚えるしかありませんが、なんだか変な感じがします。

(質問理由：先週の講義の鎖や連結であることと合わせて考えても、強連結というのは、点はあるが辺が存在しないことを指しているように感じました。)

[**Q4-32**](２２９７００６７) 質問：今日やった５．１の例題「ｆ１を整数係数の１変数多項式とし、... 有限力学系 {X，ｆ} のサイクルを求めよ。」で、ｆ１(ｘ)＝ｘ＾２＋１とf1(ｘ)＝ｘ＾２＋２の場合のサイクルをかきましたが、そこから何が具体的にみえてくるのですか？

[**A4-32**] 有限力学系はどういうものかは、具体的なもので遊んでみる必要があります。

[**Q4-33**](22960018) breadth-first seach と、ｄｅ pth-first seach はどのように使い分けるのでしょうか？

(質問理由：講義ではグラフが大きくなると後者のほうが効率が良いと仰ていましたが、前者の方法の方が手法としては安定している気がするのですが、後者の利点はどのようなときに発揮されるのでしょうか？)

[**Q4-34**](２２９８００３５)Mathematica でパズルを解くとき、考えうる状態はすべて入力しないとだめなのですか。

(質問理由：今日の授業で宣教師ー人喰族パズルを解いたとき、黒板にすべての可能な状態を書きましたが、Mathematica で解くときもそれは必要なのですか。これはもっと複雑なパズルになったとき、大変な手間になると思うのですが、テキストを見ると全て入力していると思います。このようなパズルを解くとき、Mathematica がするのは鎖を見つけることで、グラフの頂点をすべて見つけ出すことはできないのですか。)

[**A4-34**] ２種類のプログラムを書いてあったと思います。後者は頂点も見つけだしています。

[**Q4-35**](22980012) 力学系について、テキストでは簡単な多項式でしたが、その他にはどのような力学系があるのでか。

(質問理由：力学系と言うからには、何らかの物理現象や状態・関係が記述できるように思うのですが、具体的にはどのような写像や集合があるのですか。)

[**Q4-36**](22950030) グラフ理論はどのような分野に応用されているのでしょうか力学系という名前の由来は何でしょうか

(質問理由：プリントを見た感じではカオス理論を構築するための道具のような気がしたんですが、他にも応用例がないのかと思いました。力学系って言葉と出てくる例に違和感を感じるのでなぜそう呼ぶのか疑問に思いました。)

第４回分質問

[**Q5-1**](22980050) 木の定義として「単純閉路を含まない連結な無向グラフ」とありました。講義の木グラフとの関係は？

[**A5-1**] 上の意味の木には、root を指定すると唯一つの木グラフが決まります。逆に講義の木グラフを無向きグラフとすると、上の意味の木になります。

[**Q5-2**](22980047) サイクルとサーキットの違いは何ですか？

[**A5-2**] サイクルは有向グラフの概念で、サーキットは無向グラフについての概念です。ただし、有向グラフのサーキットというときは、そのグラフの向きをなくし無向グラフと見たときのサーキットです。例えば、$\{\, a{\to}b, b{\to}c, a{\to}c \,\}$ という有向グラフを考えると、$(a,b),(b,c),(a,c)$ はサイクルではありませんが、サーキットです。

[**Q5-3**]() 頂点数が無限個ある場合木グラフはどうなるのですか。

[**A5-3**] 定義はできる。具体的に与えるには構造を「有限個の語」で記述しなければならない。

[**Q5-4**](22970067) ただ一点からなるグラフも木グラフというのですか？

(質問理由：家で本を見てみたら一点からなるグラフも木グラフとしてのっていました。この本には「n頂点の連結グラフは、（n－1）辺のとき、そのときだけ木である。」と書いてありましたが、この定義でもよいのですか？もし、一点からなるグラフを木グラフとしたら、プリント 4,5 の「木の基本的性質」を満たしていないような気がします。)

[**A5-4**] １点からだけなるグラフも木グラフです。4.5 の性質「辺を一つでも付け加えるとサーキットができる」は満たされている。なぜなら 付け加えることのできる辺はループ (r,r) でありそれはサーキットとなっているから。

[**Q5-5**]() 樹状図の記号表示の方法はわかりやすければ自分で勝手なものを作っていいんですか。

[**A5-5**] 自分用には何でもよいし、他の人にも見せる場合には説明を付ければよい。慣用の物を知っている場合には、それと異なるものを使うときは、理由を明確に述べる必要はある。

[**Q5-6**](22007806) 入れ子図を使う利点は何か？

[**A5-6**] 親子の関係が、線で引いてあるだけよりは、含む含まれるの関係にした方が、余分な情報が省ける点で、入れ子図の方が「直観的にわかりやすい」、視覚的にわかりやすいかどうかｈ別だが。

[**Q5-7**](22970002) 強連結な木グラフは存在しないのですか？

[**A5-7**] root はどこにも行けないので強連結ではあり得ません。

[**Q5-8**](22980012) 数式を木の形式を用いて表現することの利点は何ですか。

[**A5-8**] 数式は数学的にはラベル付き木なのです。通常の表記はそれを印刷上便利に一次元的に書いているのです。

[**Q5-9**](22950030,22980016,22980041) 部分グラフが極大であるとはどういうことですか。

[**A5-9**] 部分グラフの全体は包含関係により順序集合になります。その要素として極大ということです。

[**Q5-10**](22960018) 展張木は他にどんな使い方がありますか？

[**A5-10**] 使い方以前に概念としての重要性があります。辺を「関係がある」と考えるとき、サーキットがあると非整合性が生じます（a,b の間に２通りの経路で「関係が伝わります」)。展張木は整合性を保ちながら関係を広げていくとき、これ以上は広げられないようなものです。

自然な意味を持つ概念は、理論上多くの使い方ができることが普通です。実際、グラフ理論で重要な役割を果たしています（マトロイドとしてのグラフでは、線形空間の「基底」と同じ役割を果たします。)。

[**Q5-11**](22980007) 水道の配官が木グラフでなければならないのはなぜか？

[**A5-11**] 行き渡らないかどうか、ではなく、中途で水圧の関係で逆流することがあるということです。水道を誰も使っていない場合は圧力にしたがって色々な方向に動くはずです。

[**Q5-12**](22960115) 木であることと、辺がすべて橋であることは同値ですか・

[**A5-12**] 同値です。

[**Q5-13**](22980033) 木が単純サーキットを持たない理由がよくわかりませんでした

(質問理由：単純サーキットと単純ではない（？）サーキットの違いがよくわからないため、木の性質である単純サーキットを持つということがわかりませんでした。)

[**Q5-14**](22980035) ２つの木グラフがあって、片方の木グラフの根ともう片方の木グラフのある頂点を、ある新しい辺でつなげば、そのグラフも木グラフになりますか。

(質問理由：実際に上で書いたように２つの木グラフをつないでみると、できたグラフは木の定義や性質に矛盾しないと思います。（根と根をつなぐのは除く）)

[**A5-14**] なります。

[**Q5-15**](s980038)Mathematica で作成したプログラムをファイルに保存しておいて、またあとで使

用することは可能ですか。

[**Q5-16**](22970011) この講義で扱うことは全て Mathematica で扱うことができるのでしょうか。

(質問理由：Mathematica の構文だけでなく数学的知識もきちんとないと Mathematica は使いこなせないものでしょうか？)

[**A5-16**] 数学的な知識をより深めるためのもの、と考えてください。今までに学習した数学についても十分 Mathematica は遊ぶことができます。(Mathematica だけではないが、自分で色々使っててみようという「遊び心」がないと中々習得できない)。

[**Q5-17**](22970037) 今学んでいるグラフや木というものを理解することによって何か新しいことに結びつきますか。

(質問理由：例えば「木」を理解するといっても何となくはっきりしません。私の場合、目的意識を常に持っていなければ講義を聞いても頭の中が混乱してしまいます。ですから現段階でグラフや木というものの定義などを頭に入れて消化することが講義の目的であるならば、それはそれですっきりしますので。)

[**A5-17**] 新しいものに結びつくというよりは、これまで知っている多くのこと（数式、言語、代数等）の背景にグラフや木の構造があることを意識することにより、数学の理解を深めるということも目的の一つです。今後、多項式を一般にした「項」が出てきますが、これは木グラフの頂点にラベルを付けたものです。また、書換え規則の分析をするときにグラフの言葉がとても役に立ちます。「何のために」という意識を持って学ぶのはとてもよいことだと思います。よい質問だと思いました。

[**Q5-18**](25970398) なぜ出次数がゼロの点を根とするのでしょうか。入次数が 0 の点を根とした方がわかりやすいと思うのですが。

(質問理由：そうしても構いません。単に向きを一斉に変えれば 2 つの定義は同等です。)

[**Q5-19**](22980002) 人食い族は一般に n, n 人でも解けるないか？

[**A5-19**] 舟が岸に着いたとき、岸に居る人と舟の人とを合せたときに、人食い人種の人数が多くなってはいけないのですから、書かれていた方法はうまくいきません。

[**Q5-20**](22980002) PASCAL でも下線は変数名に使えません。

[**A5-20**] そうですね。そのために `test_varibale` とは書かずに `TestVaribale` というように書きますね。

[**Q5-21**](22950035) 離散**力学系**、状態空間、**状態**、状態**遷移**関数、有限力学系と言ったときの、力学、状態、遷移という名前の意味や由来が今一つはっきりと分かりません。

(質問理由：シュレーディンガー方程式の場合でいうとどうなるか。統計物理の場合は。(詳しい内容は省略します))

[**A5-21**] シュレーディンガー方程式の場合は、波動関数そのものを「状態」、方程式を発展規則と考えます。存在確率等を考えるのは、「真の状態」から引き出されるもの（我々側の認識の仕方に属するもの）と考えます。安定状態等の話しは、背景にある緩和過程などの動的過程を捨象できるところの話しで、背景に＜力学系＞的動的描像があると思います。基本的原理から何を引き出すかという所には多くの数学的処理が入ってきますが、「存在はどうあるのか」という問いに意味があるとするときは、力学系的な描像が自然科学の根底にあると思います。

[**Q5-22**](22980043) 道は写像と考えてよいのですか。

[**A5-22**] グラフを平面上に図示したときは、幾何でいうところの道に対応しますが、パラメータの付け方は自由ですので、沢山の写像に対応します。

[**Q5-23**](22980048) 強連結は有向グラフに対しての性質ですか？

[**A5-23**] そうです。向きの付け方に依存します。