理学部数学科 2000 前期 計算数学 1 [1]

担当：辻下　徹[2]

お知らせ

Mathematica について　Mathematica はこれまでに練習したことを組みあわせれば何でもできるので、自分で挑戦してみてほしい。たとえば、入力系列に応じてオートマトンがどのように動作するかを計算するプログラム、文法を与えたとき、その文法が定める言語に属する語を求めるプログラム等。

今後の予定　これまで、グラフ・力学系・オートマトン・文法の概念を学んだ。オートマトン（チューリング機械）・文法については後期の計算数学３で詳しく取り上げる。きょうから普遍代数を学ぶ。これは、「演算」に関する議論で共通する部分を明確にするもので、数理論理学の重要な一章ともなっていると共に、種々の「理論的」プログラミング言語の基盤にもなりつつある。

きょうやること

- 作用素型
- 項
- 項代数

目 次

[1] URL:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html`
質問提出アドレス:`cs2000@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp`

[2] Email:`tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp`,
Homepage:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/`

8　普遍代数 作用素型と項代数

8.1　概要

作用素（演算）があると、合成の仕方が無数にある。合成手順は**項**(term) で表わされる。作用素は、項同士を結び付けて新たな項を作りだす。この演算により**項代数**ができる。項の間に関係を導入することにより一般の代数構造が定義される。

8.2　作用素型

演算のワンセットを作用素型 (signature) という。定義は以下の通り：

(Ω, α) が**作用素型** であるとは

- Ω は有限集合
- $\alpha : \Omega \to \mathbf{N}$ は写像。

$\alpha(\omega)$ を作用素記号 ω のアリティ[3]という。

$$\Omega_n := \alpha^{-1} n,$$
$$\Omega_+ := \Omega \setminus \Omega_0.$$

アリティ 0 の作用素記号を**定数記号**という。

8.3　Ω-項

作用素型 Ω と集合 X に対し文脈自由文法 $(\Omega \bigcup \{\ (,)\ \} \bigcup X, \{\ S\ \}, R, S)$ が定める形式言語で定められる文脈自由言語を ΩX と書く、ただし R は

$$S ::= x|c|\omega(\overbrace{S, S, \cdots, S}^{\alpha\omega}).$$

で与えられる書き換え規則 (ただし、x は変数、c は定数記号)。この言語の要素を Ω-**項**と呼ぶ。

8.4　Ω 項の種々の表示法.

Ω 項はいろいろな方法で　文字列表示される。

ポーランド記法 文脈自由言語 $S ::= x|c|\omega S^{\alpha\omega}$ で定義される文字列 ($x \in X$, $c \in \Omega_0$, $\omega \in \Omega_+$) 。これは括弧なしに一意的に項を表示できるが、項の木構造を見抜くのは易しくない。

関数合成記法 ポーランド記法とほとんど同じであるが、読み易い。文法は

$S ::= x|c|\omega(S, S, \cdots, S).$

この記号列の全体を $\mathcal{L}(\Omega, X)$ と書き、その元を Ω - 列項と呼ぶ。

中置き記法 関数記号ごとに、どの場所に書くかを決める。例えばアリティ 2 の関数記号 b の場合、$S ::= (S)b(S)$ という書換規則を入れる。この記法は読み易いが、あいまいさをなくすために括弧が必要となり、やや冗長になる。この場合、記号の結合度に強弱を与えることにより、括弧の数を減らすは可能であるが、括弧を全くなしで済ます訳にはいかない。

8.5 項の木による表示

項 $\in \Omega X$ は、次のようなラベル付き有限順序木 $(V, E, \lambda : V \to \Omega \cup X)$ により表現できる。ただし、順序木とは、各頂点の子供の集合に線形順序が与えたもの。

1. $\lambda v = \omega \in \Omega$ のとき、そのアリティが n ならば、v の出次数は n.
2. $\lambda v \in X$ ならば、 v は葉である。

例 $\Omega_0 = \{ c \}, \Omega_1 = \{ u \}, \Omega_2 = \{ f, g \}, X = \{ x, y \}$ の場合の項の例。

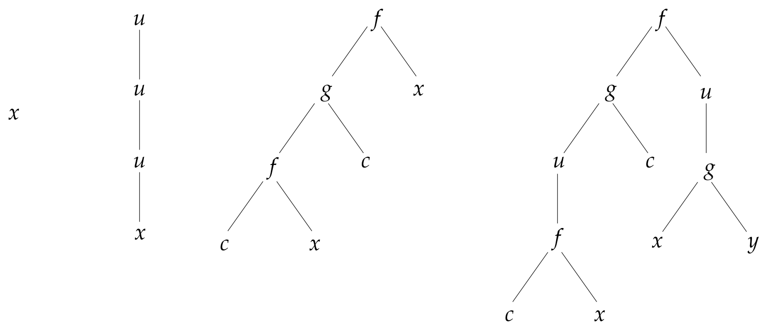

図 1: 項の例

8.6 例

環を決める作用素型

$$\Omega_2^Z := \{ \times, + \}, \quad \Omega_1^Z := \{ - \}, \quad \Omega_0^Z := \{ 1, 0 \}.$$

とし、$X = \{ x, y, z \}$ とする。図 2 左の項は上記の 3 つの記法を用いると

- $+1 - \times xy$,
- $+(1, -(\times(x, y)))$,
- $1 + -x \times y$

と表される。ここで、第 3 の記法では、結合の強さを $\times > - > +$ とした。

命題論理式を決める作用素型 $\Omega_0^B := \{ \bot \}, \ \Omega_1^B := \{ \neg \}, \ \Omega_2^B := \{ \to, \wedge, \vee \}.$ とし、$X = \{ P, Q, R \}$ とするとき、X を変数とする Ω-項を**命題論理式**といい、X の元を命題変数という。例：図 2 右の項は

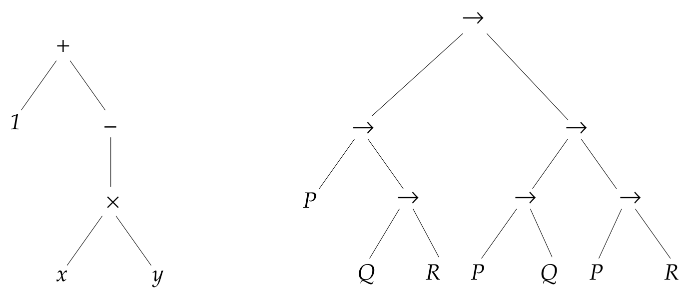

図 2: 項の例

- $\to\to P\to QR\to\to PQ\to PR$,
- $\to(\to(P,\to(Q,R)),\to(\to(P,Q),\to(P,R)))$,
- $(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$,

などと表される。

なお、第 3 の表しかたでは、通常結合度の強さを $\neg > \wedge > \vee > \to$ とする。従って

$$\neg P \wedge Q \vee R \to S$$

は $((\neg P)\wedge Q)\vee R)\to S$ を表す。また $\to$ は**左結合的**とされる、従って $P\to Q\to S$ は $(P\to Q)\to S$ を表す。すると上の命題論理式は、$P\to(Q\to R)\to(P\to Q\to(P\to R))$ と表される。

8.7　代入

項 $t \in \Omega X$ とする。 ある頂点 v が変数 $x \in X$ をラベルとして持つとき、x は**項 t に出現する**といい、v を変数 x の**出現位置** (occurence) という。

変数への項の代入は、代入データ $\sigma : X \to \Omega X$ に基づき行われる。その結果を $t[\sigma]$ と書く。これは、すべての変数 x について、x というラベルのついた頂点に、λx という木を継ぎ足して得られる項。

8.8　項の合成

項 $t_1, \cdots, t_n \in \Omega X$ とし、ω をアリティ n の関数記号とする。このとき、$x_i \mapsto t_i$ が定める代入写像 $\{ x_1, \cdots, x_n \} \to \Omega X$ を σ とするとき

$$\omega(t_1, \cdots, t_n) := \omega(x_1, x_2, \cdots, x_n)[\sigma]$$

と書き、これを項の合成という。

8.9 演習問題

(8-1) 図 1 の項を 3 つの記法で表せ。

(8-2) ポーランド記法で表わされた次の式を普通の表示で表せ。

$$+ \times x\ y \times +x\ x/y\ z,$$

ただし、$+, \times, /$ はどれもアリティ 2 の関数記号とする。

(8-3) f, g はアリティが 2 で中置き記法を用いるとする。結合の強度が $f > g$ で、f は右結合的、g は左結合的であるとき、次の項をポーランド記法と木で表せ。x, y, z は変数とする。

(a) $xfxfxfxfx$

(b) $xgxgxgxgx$

(c) $xfxgxfxgxfx$

(d) $xfxgxfyfzgx$

(e) $xf(xgx)fyf(zgx)$

(8-4) 代入データ $\sigma(x) = f(x, u(y)), \sigma(y) = f(f(x, c), g(x))$ に基づく代入を求めよ：

(a) $f(g(x, y), u(x))[\sigma],$

(b) $u(f(x, y))[\sigma].$

8.10 第７回の質問

[**Q8-1**](22950035) 人の脳の思考過程とコンピュータの思考過程の違い、関連性などを教えて下さい

[**A8-1**] まず人の思考過程はありますが、脳には思考過程はありません。脳内には複雑な電気的化学的過程がありますが、それと内面的思考過程との「関係」は一体どういうことか、それを考え直してみてください。「思考」は自分の思考以外は想像でしかなく、脳内過程で直接見れるのは他人の脳です（自分の脳も工夫すれば見れなくはないですが、脳を見て思考との関係を見定めたいとしているときは「自分の脳を見て自分の思考との関係を見定めたい」という思考をしているので、少し考えていくと論理的なパラドックスに陥ることがわかる。)。「コンピュータが思考する」という文の意味は自明ではありません。チューリングテストがその問題を分析しています。「コンピュータの思考過程」という言葉は使わない方がよいと思います。コンピュータの電気的過程と脳の化学的電気的過程は、後者もニューロンの発火という事象が離散的に起こるので、デジタル的な面があるところで似ている。しかし、脳の構造は経験に応じた可塑性がある点がコンピュータとは大きく異なる。

[**Q8-2**](22970041)$q_1 \xrightarrow{a} q_2$ の a は写像ですか。逆にも行けるのですか？

[**A8-2**] 写像ではなく、(q_1, a, q_2) という三つ組みをそう表記しただけです。この三つ組みの「使い方」として、「状態 q_1 にあった機械が入力 a を受けて状態 q_2 に変化する」ことを表現するのに使う。

[**Q8-3**](22970044) 文法の一般とはどんなものか？何をもって一般としているのか？

[**A8-3**] 文法の定義以外の制約がない、という意味だが、余り言い言葉ではない。単に文法、と言うべきもの。

[**Q8-4**](22980002)\($[A-za-z0-9]*$\)\1 のような前方参照は如何にしてオートマトンになるのか。

[**A8-4**] ご指摘の通り、これは有限オートマトンではできない。

[**Q8-5**](22980003)$R \subseteq \Sigma^*$ に対し、正則表現で表される集合で、R を含む最小のものを σR と定めようとするとき、これは well-defined か？

[**A8-5**] 正則言語の無限個の共通部分は正則言語になるとは限らないので、well-defined ではない。

[**Q8-6**](22980007)[Q7-6] の答えは何でしょう。

[**A8-6**] 私はまだ解いてみていませんので、どのくらい難しいかがわかりません。

[**Q8-7**](22980008)$0 + 1 \leftrightarrow \{\, 0, 1 \,\}$ というのがわからない。$0 + 1 = 1 \leftrightarrow \{\, 1 \,\}$　ではないのか？

[**A8-7**] $0+1=1$ は真偽に意味がある命題、$\{1\}$ は単なるモノで、真偽とは関係がないので、$0+1=1 \leftrightarrow \{1\}$ は無意味であることに注意。なお、$0+1$ は定義により $\{0\} \bigcup \{1\}$ を表す。

[**Q8-8**](22980011) クリーネの定理には、実用性があるか？

[**A8-8**] 有限オートマトンは IC に簡単に焼き付けることができるので、特定の正則式で表される言語を生成する回路が作れことがわかる。

[**Q8-9**](20980012) 正則表現とは、具体的にはある点からある点への経路を表しているのか。

[**A8-9**] **正則言語**は、ある有限有向グラフのある点からある点への経路の全体を表したものです、ただし、辺を辺のラベルで表現したものです。

[**Q8-10**](22980016) すべてが正則にならないか？

[**A8-10**] $r + * + s * **$ は正則ではない。

[**Q8-11**](22980030)6.3.4 例題の意味がわからない

[**A8-11**] (()()())()()(), (()(()())()) などがバランスがとれた括弧式。

[**Q8-12**](22980022) この講座は最終的に何を学びとればよいのか

[**A8-12**] 言語的な表現を用いて説明されている（非数値的な）こと中から、数学的な枠組みを見抜くことを学びとればよい。計算とは何か、演算とは何か、等。

[**Q8-13**](22980033)6.4.3 で使われている、言語が広い・狭いという概念がわからない。「本当に広い」というときの「本当に」というのはどういう意味か？

[**A8-13**] 例えば、正則言語のクラスが文脈自由言語のクラスより狭い、という意味は、正則言語は文脈自由言語でもある、ということであり、本当に狭いというのは、正則言語ではない、文脈自由言語があることを言う。

[**Q8-14**](22980035) 形式言語と、文法が定める形式言語はどう違うのかわからない。具体的にはどうかわるのか。

[**A8-14**] 文法が定める形式言語以外の形式言語は、具体的に「書きにくい」が、実際には存在する。

[**Q8-15**](22980041) 正則表現の個数を n とおくと、文字列に関する条件の空間の次元は m と言えますか

[**A8-15**] 文字列に関する条件の空間が n とはどういう意味か。」

[**Q8-16**](22980045) 文法というのはどういう時に「都合の良い形式言語になるのでしょうか？

[**A8-16**] 何をしたいかに拠ります。

[**Q8-17**](22980047) 正則表現は一意に決まるか。

[**A8-17**] 決まらない。例：1[1]$*$ と [1]+ は同じ。

[**Q8-18**](22980048) 正則表現とその表す集合は具体的にはどういったものなのでしょうか。

[**A8-18**] それを答えたのがクリーネの定理。

[**Q8-19**](22980050)$\{\,0,1\,\}$ 上のブール演算と一般のブール代数について

[**A8-19**] $\{\,0,1\,\}$ 上のブール演算から、ブール代数の公理を抽出できます。その意味では $\{\,0,1\,\}$が原型的な役割をす。

[**Q8-20**](22990045) 正則表現というのは、線形代数の「正則」とは意味が違うか

[**A8-20**] 違います。

[**Q8-21**](22960115) 今日の授業の文法がわかりません。来週もう一度やってもらえませんか？
問題６－１は分かりますが、問題６－２がわかりません。
$S ::=$ とはどういう意味ですか？
$A ::= a|aS|bAA$ はどういう意味ですか？

[**A8-21**] 書き換え規則 $A{\to}a$, $A{\to}aS$, $A{\to}bAA$ をまとめて表記したものが

$$A ::= a|aS|bAA4$$

です。

[**Q8-22**](s0078051) コマンドラインにおける正規表現とファイル上の正規表現はどのようにして区別をつけたら良いしょうか？

[**A8-22**] コマンドラインでは \ が特別な意味を持ちますので\\ と書かなければなりません。このように、特殊な役割を果たす文字を含む文字列をプログラムに入力するときは、その特殊文字を「普通文字」として解釈させるために特別な入力法が必要になります。