理学部数学科 2000 前期 計算数学 1 [1]

担当：辻下　徹[2]

きょうやること

- 項代数
- Ω-構造
- 代数的理論

目 次

9 普遍代数 (2) Ω-構造と代数的理論 1
9.1 Ω-構造 . . . 2
9.1.1 定義 . . . 2
9.1.2 項の値 . . . 2
9.1.3 項の定める演算 . . . 3
9.1.4 演習問題 . . . 3
9.2 代数的理論と T-代数 . . . 4
9.2.1 Ω-構造における等式の「ただしさ」 . . . 4
9.2.2 代数的理論の定義 . . . 4
9.2.3 $\mathcal{T}$-代数 . . . 4
9.2.4 例 . . . 5
9.3 代数理論の論理 . . . 6
9.3.1 正しい等式 . . . 6
9.3.2 推論規則 . . . 6
9.3.3 証明の書き方 . . . 8
9.3.4 証明の例. . . . 8
9.3.5 健全性定理. . . . 8
9.3.6 自由代数. . . . 9
9.3.7 完全性定理. . . . 9
9.3.8 演習問題 . . . 10
9.4 第 8 回の質疑 . . . 11

9 普遍代数 (2) Ω-構造と代数的理論

[1] URL:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html`
質問提出アドレス:`cs2000@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp`

[2] Email:`tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp`,
Homepage:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/`

普遍代数の概要

アリティ2 の作用素 f の意味付けは、ある集合 A の上の演算 $f_A : A \times A \to A$ により与えられる。作用素型 Ω の各作用素 ω (アリティk とする) に対応する演算 $\omega_A : \overbrace{A \times \cdots \times A}^{k} \to A$ が与えられた集合を Ω-構造と呼ぶ。このとき、Ω-項 t は、A の元にこれらの演算を適用する手順を記述するものとなる．その手順による複合演算を t_A と書く.

一つの代数的理論 $\mathcal{T}$ は、ある作用素型 Ω といくつかの公理

$$t_1 = s_1, \quad t_2 = s_2, \cdots t_m = s_m$$

$(t_i, s_i$ は Ω-項) により与えられる。$\mathcal{T}$-代数とは、Ω-構造であって、

$$t_{1A} = s_{1A}, \quad t_{2A} = s_{2A}, \cdots t_{mA} = s_{mA}$$

を満たすものである。

ある代数的理論 $\mathcal{T}$ についての主要な問題は、どの $\mathcal{T}$-代数 A についても $t_A = s_A$ となるような項の対 (t, s) をすべて求めることである．この特徴付けを与えるのが完全性定理である。

9.1 Ω-構造

9.1.1 定義

Ω を作用素型とする。$\mathcal{A} = (|\mathcal{A}|, \left\{ \omega_{\mathcal{A}} \;\middle|\; \omega \in \Omega \right\})$ が **Ω-構造である**とは、

- $|\mathcal{A}|$ は集合 (台集合と呼ばれる),
- $\omega_{\mathcal{A}} : \overbrace{|\mathcal{A}| \times \cdots \times |\mathcal{A}|}^{\alpha\omega} \to |\mathcal{A}|$ $(\omega \in \Omega)$ は写像.

例

1. $\mathbf{Z}$ は自然な Ω_Z 構造を持つ。
2. $\mathbf{B} := \{ 0, 1 \}$ は自然な Ω_B 構造を持つ。
3. ΩX 自身は自然な Ω 構造を持つ。

9.1.2 項の値

$\mathcal{A}$ を Ω-構造とし、$A = |\mathcal{A}|$ とおく。このとき

定理 9.1 $\kappa_{\mathcal{A}} : \Omega A \to A$ が次を満たすように唯一通りの仕方で定義される（以下単に κ と書く）。

- $\kappa(a) = a$,
- $\kappa(\omega(t_1, \cdots, t_n)) = \omega_{\mathcal{A}}(\kappa(t_1), \cdots, \kappa(t_n))$, $(n = \alpha(\omega), t_i \in \Omega A)$.

9.1.3　項の定める演算

$\mathcal{A}$ を Ω-構造とし A をその台集合とする。変数集合 X から A への写像 σ を、各変数に A のどの元を代入するかを指定するものと考え、**代入データ**と呼ぶ。これは

$$\Omega X \ni t \mapsto t[\sigma] \in A$$

に次のようにして拡大される。

$$\begin{tikzcd} t & \Omega X \arrow[r, "\Omega\sigma"] & \Omega A \arrow[d, "\kappa_{\mathcal{A}}"] \\ & t[\sigma] & A \end{tikzcd}$$

ここで、$\Omega\sigma$ は、X を変数とする項の各 $x \in X$ を σx に置き換えて得られる項である．これは A を変数とする項となる．

例（続き）　.

1. Ω^Z-項は多項式により表現され、$\mathbf{Z}$ 上の自然な Ω^Z 構造については、項の値は変数への数の代入による多項式 の値となる。たとえば $\sigma x = 2$, $\sigma y = 2$, $\sigma z = 3$ であるとき、

$$x \times (y+z) \overset{\Omega\sigma}{\longmapsto} 2 \times (2+3) \overset{\kappa}{\longmapsto} 10.$$

2. $\mathbf{B}$ 上の Ω^B-構造については、代入は命題変数への真偽値の割当に相当し、命題論理式 t の対応する真偽値が、その項 t の値となる。どんな代入についても 1 となる命題論理式を**恒真式**（トートロジー）という。

9.1.4　演習問題

問 [9-1]　$\Omega_0 = \{\ c\ \}$,$\Omega_1 = \{\ u\ \}$,$\Omega_2 = \{\ b\ \}$ とする。

(1) $A = \mathbf{N}$ 上の Ω 構造を $c_A = 5$, $u_A(z) := z + 2$, $b_A(z, w) = z^w$ により定義するとき、
(a) $b(b(c, u(c)))_A$ を求めよ。
(b) 代入 $\sigma(x) = 1, \sigma(y) = 10, \sigma(z) = 2$ による次の項の値を求めよ。

- $b(b(b(x, y), c), u(y))$,
- $b(z, b(z, b(z, z)))$.

9.2 代数的理論と $\mathcal{T}$-代数

9.2.1 Ω-構造における等式の「ただしさ」

$\mathcal{A}$ を Ω-構造とする。代入データ $\sigma : X \to A$ は

$$\sigma : \Omega X \to A$$

をひき起す。2 つの項 t, s が代入 σ で同じになるとき

$$\boxed{\sigma \models t = s}$$

と書く。

どの代入データ $\sigma : X \to A$ についても $\sigma \models t = s$ であるとき、等式 $t = s$ が Ω-構造 $\mathcal{A}$ で成立つ、あるいは**正しい**、といい

$$\boxed{\mathcal{A} \models t = s}$$

と書く。

9.2.2 代数的理論の定義

$\mathcal{T} = (\Omega, \mathcal{E})$ が**代数的理論**であるとは

- Ω は作用素型、
- $\mathcal{E}$ は $\Omega X \times \Omega X$ の部分集合

であることをいう。$\mathcal{E}$ を**公理**という。$(t, s) \in \mathcal{E}$ であることを

$$\mathcal{T} \vdash_0 t = s$$

と書く[3]。

9.2.3 $\mathcal{T}$-代数

$\mathcal{T} = (\Omega, \mathcal{E})$ を代数的理論とする。Ω-構造 $\mathcal{A} = (|\mathcal{A}|, \{\, \omega_{\mathcal{A}} \,\})$ が **$\mathcal{T}$-代数**であるとは、すべての $(t, s) \in \mathcal{E}$ について

$$\mathcal{A} \models t = s$$

が成り立つことをいう。

[3] $t = s$ における等号 $=$ は「同じ」という意味はまだない。これからその意味を与えていく。

9.2.4 例

	関数記号	アリティ	公理
半群	m	2	$m(x,m(y,z)) = m(m(x,y),z)$
モノイド	e m	0 2	$m(x,m(y,z)) = m(m(x,y),z)$ $m(x,e) = x$ $m(e,x) = x$
群	e i m	0 1 2	$m(x,m(y,z)) = m(m(x,y),z)$ $m(x,e) = x$ $m(e,x) = x$ $m(x,ix) = e$ $m(ix,x) = e$
束	$\wedge, \vee$ $0,1$	2 0	結合性: $(L1)$ $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ $(L2)$ $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ 可換性: $(L3)$ $x \wedge y = y \wedge x$ $(L4)$ $x \vee y = y \vee x$ 吸収律: $(L5)$ $x \vee (x \wedge y) = x$ $(L6)$ $x \wedge (x \vee y) = x$ $0,1$ の公理: $(L7)$ $x \wedge 1 = x$ $(L8)$ $x \vee 1 = 1$ $(L9)$ $x \wedge 0 = 0$ $(L10)$ $x \vee 0 = x$

ブール代数	$\wedge, \vee$ $\neg$ $0,1$	2 1 0	束の公理	$(L1)$ $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ $(L2)$ $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ $(L3)$ $x \wedge y = y \wedge x$ $(L4)$ $x \vee y = y \vee x$ $(L5)$ $x \vee (x \wedge y) = x$ $(L6)$ $x \wedge (x \vee y) = x$ $(L7)$ $x \wedge 1 = x$ $(L8)$ $x \vee 1 = 1$ $(L9)$ $x \wedge 0 = 0$ $(L10)$ $x \vee 0 = x$
			分配律	$(B11)$ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ $(B12)$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
			補元の公理	$(B13)$ $x \wedge \neg x = 0$ $(B14)$ $x \vee \neg x = 1$

9.3 代数理論の論理

9.3.1 正しい等式

$\mathcal{T}$ を代数的理論とする。2 つの項 t, s が、どの $\mathcal{T}$ 代数 $\mathcal{A}$ についても

$$\mathcal{A} \models t = s$$

を満足するとき、$t = s$ は理論 $\mathcal{T}$ で正しいといい

$$\mathcal{T} \models t = s$$

と書く。定義から $(t, s) \in \mathcal{E}$ ならば $t = s$ は正しい。

$\boxed{\text{問題：正しい } t = s \text{ をすべて見つけよ。}}$

これを解くために、正しい等式から正しい等式を導ける**推論規則**を探す。すると、次の様な自明な規則がすぐに見つかる。

9.3.2 推論規則

公理 $(s, t) \in \mathcal{E}$ に対し

$$\frac{}{s = t}.$$

反射律

$$\frac{}{s = s}$$

対称律

$$\frac{s = t}{t = s}$$

推移律

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}$$

代入律

$$\frac{t_1 = t_2}{s[x/t_1] = s[x/t_2]}$$

すなわち、$t_1 = t_2$ ならば、t_1 がどういう所に出現しても、それを t_2 に置き換えてもよい。

特殊化律 任意の項 s と変数 x に対し

$$\frac{t_1 = t_2}{t_1[x/s] = t_2[x/s]}.$$

すなわち $t_1 = t_2$ は等式のパターンと考える.

重要　$s = t$ がこの推論規則で得られるとき $\mathcal{T} \vdash s = t$（あるいは $\mathcal{T}$ を単に $\vdash s = t$）と書く。$\vdash s = t$ のとき、$s = t$ は代数的理論 $\mathcal{T}$ において証明可能であるといい、$s = t$ は $\mathcal{T}$ の定理であるという。

代入律の例　群論で、結合公理 を項 $m(ie, z)$ の z に代入すると図 1 のようになる：

$$\mathcal{T}_G \vdash m(ie, m(x, m(y, z))) = m(ie, m(m(x, y), z)).$$

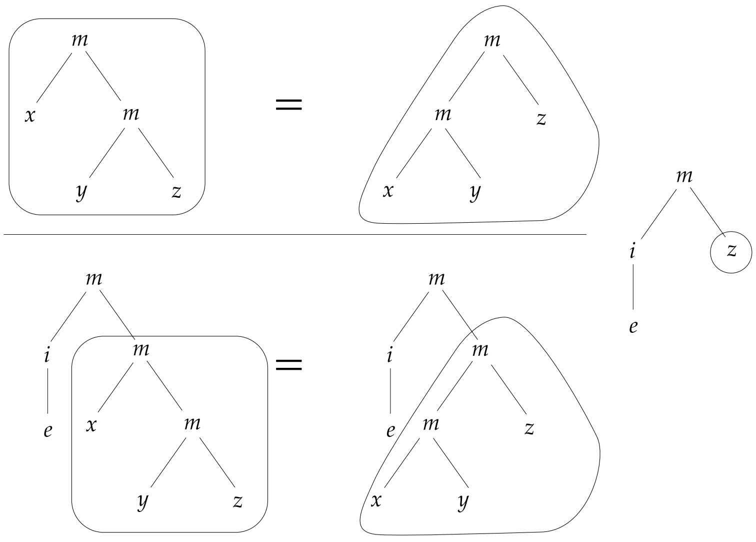

図 1: 代入律の例

特殊化律の例. 半群論で、公理の z に $m(y,z)$ を代入すると図 2 のようになる：

$$\mathcal{T}_S \vdash m(x, m(y, m(y,z))) = m(m(x,y), m(y,z)).$$

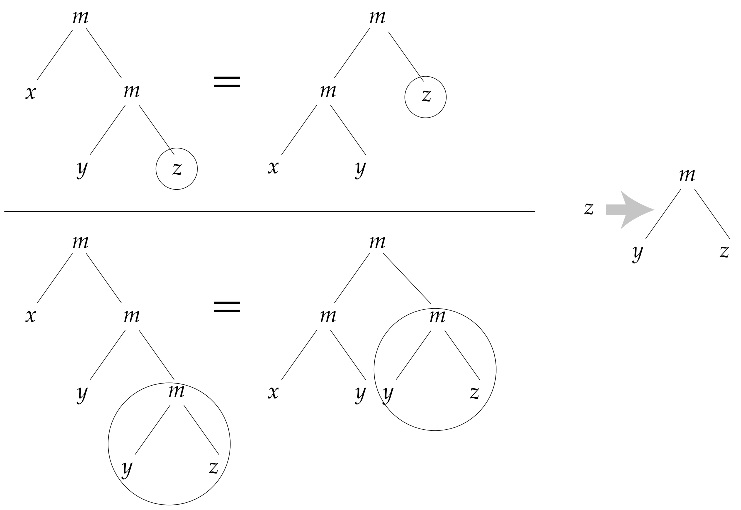

図 2: 特殊化律の例

重要

9.3.3 証明の書き方

$t_1 = t_2$, $t_2 = t_3$,...,$t_{n-1} = t_n$ より、$t_1 = t_n$ が得られるが、これを、$t_1 = t_2 = \cdots = t_n$ と書く。また、それぞれの $t_i = t_{i+1}$ は、すでに得られている定理 $t = s$ から、特殊化または代入で得られるものであるが、それを明記する。

9.3.4 証明の例.

群論で

$$\mathcal{T}_G \vdash im(x, y) = m(iy, ix).$$

以下、$m(x, y) = x.y$ と書く。

証明.

$$\begin{aligned}(iy.ix).(x.y) &= iy.(ix.(x.y)) && \text{結合律と代入}\\ &= iy.((ix.x).y) && \text{結合律と特殊化}\\ &= iy.(e.y) && \text{逆元公理と特殊化}\\ &= iy.y && \text{単位元公理と特殊化}\\ &= e && \text{逆元公理と代入}\end{aligned}$$

より

(∗) $$\vdash (iy.ix).(x.y) = e.$$

従って

$$\begin{aligned}i(x.y) &= e.i(x.y) && \text{単位元公理 } x = e.x \text{ と特殊化}\\ &= ((iy.ix).(x.y)).i(x.y) && \text{定理 (*) と対称律と代入}\\ &= (iy.ix).((x.y).i(x.y)) && \text{結合律と特殊化}\\ &= (iy.ix).e && \text{逆元公理と代入、特殊化}\\ &= iy.ix && \text{単位元公理と特殊化}\end{aligned}$$

証終

従って $\vdash i(x.y) = iy.ix$ が示された。

9.3.5 健全性定理.

重要

定理 9.2 $\mathcal{T} \vdash t = s$ ならば、$\models t = s$ である。

証明. 証明には、6つの推論規則の分子が正しければ分母も正しいことをしめせばよい。最初の4つの規則は自明である。

特殊化律と代入律の健全性の証明には次の自明な補題が必要である。

補題 9.3 $t, s \in \Omega X$ と代入データ $\sigma : X \to A$ について

$$\sigma(t[x/s]) = \sigma_{x/\sigma(s)}(t),$$

ただし、$\sigma_{x/a} : X \to A$ は $y \mapsto \sigma(y) (y \neq x)$, $x \mapsto a$ という代入データを表す。

特殊化律の健全性： $\models t_1 = t_2$ ならば、任意の代入データ $\sigma : X \to A$ に対し

$$\sigma(t_1[x/s]) = \sigma_{x/\sigma(s)}(t_1) = \sigma_{x/\sigma(s)}(t_2) = \sigma(t_2[x/s]).$$

代入律の健全性：$\models t_1 = t_2$ ならば、任意の代入データ $\sigma : X \to A$ に対し、

$$\sigma(s[x/t_1] = \sigma_{x/\sigma(t_1)}(s) = \sigma_{x/\sigma(t_2)}(s) = \sigma s[x/t_2].$$

証終

9.3.6 自由代数.

重要　集合 V に対して次のような $\mathcal{T}$-代数 $\mathcal{A}$ を、V **を生成元とする自由** $\mathcal{T}$**-代数**であるという。

(9-1-1) V は $\mathcal{A}$ を生成する。すなわち
(9-1-1-a) $V \subseteq \mathcal{A}$
(9-1-1-b) V を含む部分 $\mathcal{T}$-代数は $\mathcal{A}$ だけである。
(9-1-2) 任意の $\mathcal{T}$-代数 $\mathcal{B}$ について、どの写像 $f : V \to \mathcal{B}$ もただ一つの $\mathcal{T}$-準同型 $\tilde{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に拡張される。

必修　**定理 9.4** 自由代数は存在し、本質的にただ一つである。

証明.（略証）ただ一つであることは容易にわかる。

ΩX 上の 2 項関係 $\sim$ を　$t \sim s \overset{def}{\iff} \vdash t = s$ により定義すると、これは同値関係となる。その同値類集合を $\mathcal{A}$ とする。このとき　$\mathcal{A}$ には

$$\omega([t_1], \cdots, [t_n]) := [\omega(t_1, \cdots, t_n)]$$

により Ω-構造が定義できる。また、代入

$$\sigma : X \to \mathcal{A}$$

に対して、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を t に現れる変数とするとし、$\sigma(x_i) = [t_i]$ とすると、

$$[t][\sigma] := [t[x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n]]$$

となる。従って $t = s$ が公理ならば、特殊化律より $\vdash t[x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n] = s[x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n]$ であるから、$\models t = s$ となる。従って $\mathcal{A}$ は $\mathcal{T}$-代数となる。

これが自由 $\mathcal{T}$-代数であることが容易に示される。　証終

9.3.7 完全性定理.

必修　**定理 9.5** $\models t = s$ ならば、$\mathcal{T} \vdash t = s$ である。

証明. X の生成する自由 $\mathcal{T}$-代数 $\mathcal{A}$ を考える。もしも $s = t$ が正しければ、$\mathcal{A} \models t = s.$ 従って、代入 $\sigma(x) = [x]$ を考えると

$$[t] = t[\sigma] = s[\sigma] = [s]$$

となる。

従って、$[t] = [s]$ となるが、定義によりこれは $\vdash t = s$ ということである。　証終

9.3.8 演習問題

A:定義からすぐ分かる、B:少し工夫が要る,C:やや難しい,D:難しい

問 $[9\text{-}5]_A$ 半群論で次をしめせ。

(9-5-1)

$$\vdash x.(y^2.x) = (x.y^2).x$$

(9-5-2)

$$\vdash (x.(y.z))^2 = ((x.y).z)^2$$

問 $[9\text{-}6]_B$ ブール代数理論で次をしめせ。

(9-6-1) $\vdash x \wedge x = x.$
(9-6-2) $\vdash \neg 0 = 1.$
(9-6-3) $\vdash \neg\neg x = x.$
(9-6-4) $\vdash \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y.$

問 $[9\text{-}7]_C$ ブール代数理論の公理の中の次のものだけで、他の公理は導けることを示せ：

(9-7-1) 交換律
(9-7-2) 分配律
(9-7-3) 同一律 ($x \vee 0 = x$, $x \wedge 1 = x$)
(9-7-4) 補元の公理

問 $[9\text{-}8]_B$ $(A, \wedge, \vee)$ を束とするとき、

$$x \leq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \wedge y = x$$

と定めると、$(A, \leq)$ は順序集合となることを示せ。

9.4 第８回の質疑

[**Q9-1**](22900030) テキストデータに対してバイナリデータと言いますがこれはアリティ２以下の記号列ということで、このように呼ぶのでしょうか。

[**A9-1**] コンピュータでのデータは、電気的なオンオフを並べて保持しますので、数学的には２進数 (binary numbers) で表現されます（１個のオンオフで記録される情報の量を１ビットといいます)。その意味で付加構造のない裸のデータのことをバイナリデータと言います。これに対し８ビットごとに一つの文字を表すという約束で作られたバイナリデータをテキストデータと言います。

[**Q9-2**](22960115)8-2 の「普通の表示」とはなんですか？

[**A9-2**] 小学校以来用いている数式の書き方のことです。

[**Q9-3**](22970037) 結合の強度とはどのように使うのですか？

(質問理由：演習問題 8-3 で結合の強度は $f > g$ とありますが、ポーランド記法と木で表す時にどこで必要になるのですか)

[**A9-3**] たとえば、$xfxgx$ のような項には $f(x, g(x, x))$ と $g(f(x, x), x)$ の２通りの可能性がありますが、$f > g$ ならば後者、$f < g$ ならば前者になります。

[**Q9-4**](22980047) 演算子の強さが決まっていない時は木グラフに表せないのですか。

[**A9-4**] 上の回答を参照。

[**Q9-5**](22970044) 普遍代数の「普遍」とはどのような意味ですか？

[**A9-5**] 講義で説明したように、半群・群・環・束等の具体的な代数構造を代数学で勉強するが、これらの理論に共通する構造を調べる、という意味で普遍代数という。

[**Q9-6**](22980050) 代数はそもそも普遍的というイメージをもっているのですがまちがいですか？「普遍」、と代数の前ついているのはなぜですか？

[**A9-6**] 上の回答を見よ。

[**Q9-7**](22970067)Ω 項の表示に、３つの表記法がありましたが、それはどういう目的でつくられたものなのですか？

[**A9-7**] 読みやすさでは木表示がすぐれていて、理論的分析にはポーランド記法が優れていて、計算などでは中置き記法がすぐれているように思います。

[**Q9-8**](22980048) 数学の世界でポーランド記法を用いる例はありますか？

[**A9-8**] 上を参照

[**Q9-9**](22980002) ３項以上の演算子を含む中置記法の式は文脈自由文法で記述できるのだろうか？実際に使ったことはないのですが、

```
int sign(int x){
  return (x>=0)? (x>0)? 1:0:-1;
}
```

等はいかにして解釈すべきか。

[**A9-9**] たとえば３項演算子 F を中置記法で $xFyz$ のように使うとする。このときは

$$t ::= x|y|z|(t)F(t)(t)$$

できる。$\left\{ x^i y^i z^i \;\middle|\; i = 0, 1, 2, 3, \cdots \right\}$ は文脈自由ではない。

[**Q9-10**](22980007) 現在数学という学問の中で、脳の研究はされていますか。また、もしもされているとすれば、人間の脳のどういった面が研究されていますか・

(質問理由：あるとき、カオスと脳が関連していると聞いたことがあります。とすると、数学の研究対象として脳が取り上げられているのではないかと思い、興味がわきました。)

[**A9-10**] 力学系理論の文脈で脳のモデルがいろいろ提唱されていて研究されています、これは脳の「情報処理」という側面の研究です。心脳関係は問題設定も明確にはされていません（数学に限らず、脳科学全般で。)。

[**Q9-11**](22980011)Ω^Z, Ω^B の Z, B にはどんな意味があるのか。

[**A9-11**] Z は整数の集合を表すのに使う Z（ドイツ語の数「Zahl」からか。）、B はブール (Boole) 代数の B.

[**Q9-12**](22980012) 逆ポーランド記法とポーランド記法では何か違うか？処理が早くなるとか何らかのメリットがあると思うのですが。それとも単に作者の癖という程度ですか

[**A9-12**]

[**Q9-13**](22980013) 名大論理式を決める作用素型の例がよくわかりません。$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ と図２がどうかかわっているのかがわかりません。Ω が無限のとき、8.6 の例のようなことはできますか？

[**Q9-14**](22980018) ポーランド記法を用いることによってどのような便利なことがあるのですか。

(質問理由：見づらくなるだけだと思うのですが。)

[**A9-14**] 少し訓練すると、普通の式よりも使いやすくなる、という人がいます。括弧がないということは、明快な記法であるということをも意味します。

[**Q9-15**](22980020)「代数構造が定義される」とありますが、他に一般にはどのような所で使われるのですか？代数系となるようなものにしか使わないのですか？

[**Q9-16**](22980030)8.6 例　環の所で $x \times x \times (y+z)$ と $x \times x \times y + x \times x \times z$ が「**今は**違う」と言った意味がわかりません。

[**A9-16**] 代数系の演算だけで公理をまだ導入していない現段階では違う、という意味でした。違う項を「同じ」かどうかを決めるのが代数系の公理です。

[**Q9-17**](22980031) コンピュータの電気的過程と脳の化学的・電気的過程を全く同じにすることはできますか？

(質問理由：経験に応じた可塑性がある点が脳とコンピュータの大きな違いなら、それを無くせば脳とコンピュータは似たものになるのでしょうか)

[**A9-17**] 異なるものが「同じ」という時は、必ず、同じとみなす基準〔定義など）が必要です。「全く同じ」かどうかは基準によります。「脳の可塑性をなくす」というのは脳を凍結される以外に方法はないでしょう。秒単位の可塑性もあると言われていて、それが認知機能で重要な役割を果たしているという説もあるくらいです。

[**Q9-18**](22980034)Ω の元は何でもよいのですか。

(質問理由：8.5 の例で Ω の元が c, u であったり、f, g であったりしました。f, g とは関数のことをいっているのでしょうか。そのとき $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ というのが、今までの数学の写像と違ってよくわかりません。)

[**A9-18**] Ω は記号の集合、と言った方がよかったかも知れませんね。記号と言っても主に文字です。慣用で関数を表示するのに使われることの多い文字 f, g などを使いましたが、かえって混乱を招いたかも知れません。ここでは、f, g は単に文字であって関数のことではありません。かわりに i, j, あ、い、甲 などを使っても構いません。図 1 の 2 番目は 甲 (乙 (甲 $(c, x), c), x)$ となります。

α は普通の写像です。

[**Q9-19**](22980045) 定数記号 c と変数 x の違いがよく分からないのですが？

[**A9-19**] 重要な質問です。項を作るという点においては両者の役割は同じです。しかし理論展開における役割は違います。変数はいわば空いた場所を指示するのに用います。したがって、変数に別のものを代入することができます。定数は、そういう形では使いません。

[**Q9-20**](22980050) 関数合成記法の括弧の数を減らせるか？

[**A9-20**] 括弧は本当は入りません。それを省いたものがポーランド記法です。

[**Q9-21**](22980051) アリティって何ですか？

[**A9-21**] 講義で聞き逃したときは遠慮なく聞き直すべきです。そのあとの講義が無駄になります。作用素を表す記号のアリティとは、表す作用素がいくつの引数を持つかを表す数です。２項演算は名前の通り、アリティが２。

[**Q9-22**](22990042)§8.6 の結合の強さ $\neg > \wedge > \vee > \Rightarrow$ は一般的か.

[**A9-22**] $\wedge, \vee$ は同じ強さとするときもあります。$\Rightarrow$ は通常一番弱い。

[**Q9-23**](22007806) カテゴリー論とはどのようなものですか？どのような部分が難しいのかも教えてください。（圏はカテゴリーのことですか？）

体を決める作用素型はありますか？

[**A9-23**] カテゴリーは対象と射からなる数学的構造です。射は「操作」や「プロセス」を抽象化したものです。この意味では代数の一種です。難しさは、射は具体的な写像とは限らない点です。

難しい点は対象を機能によって捉えるということを徹底させることです。

体に現われる演算は環の演算と同じです。体では逆元をとる演算があるが、この演算はゼロに対しては定義されないために、普遍代数として体は扱えない。