0 序

0.1 講義の主眼

この講義の目的は、高校数学と数学科で学ぶ数学との橋渡しをすることにある。橋渡しといっても、高校数学と大学の数学との間に何か深い峡谷があるわけではない。「表面的違い」や「慣習の違い」が大きいため、一見すると連続性がないように見えるだけなので、表面的な断絶に惑わされることなく「数学好き」を失わないでもらいたい。

大学では個々の知識を学ぶこと以上に、「知識の学びかた自身を学ぶ」ことに力を入れていかなければならない。その核心は「自分の明証性を形成する」というところにある。これはデカルトが発見した「明証性」の感覚を身につけることである。

> 「示された対象について、他人が考えたところあるいは我々自ら憶測するところを、求むべきではなく、我々が明晰かつ明白に直観しまたは確実に演繹し得ることを、求むべきである。」(デカルト「精神指導の規則」).

これは「**わかったかわからないか、それがわかるようになること**」と言えばわかりやすいかもしれない。そこへの最短経路の一つは「自分はどうしてわかったと思うのか」という問いをときどき発してみることにある。また、**建設的懐疑**の習慣をつけることも不可欠だ。たとえば、教官の使う「明らかに」については「ホントウか」と反射的に考える習慣が有効だ。なぜなら、他の誰かには明らかなことが自分にとって明らかでないことはよくあることだから(逆のこともある)。

この講義では、いくつかの議論の仕方や数学的構成の仕方を取り上げ、その仕方の実習を通して「わかることとはどういうことか」を学ぶ。

(1999.4.15 Ver 1.0)

0.2 「数学がわかる」とは

「数学がわかる」を「泳ぎがわかる」になぞらえて考えるのが有効である。「泳ぎがわかった」ということは「泳げること」そのものであり、「浮くこと」「ばた足ができること」「息継ぎができること」などから「1 kmを泳げること」など、いろいろな内容がある。しかも、それが一列に並んでいるわけではない。

同じように、数学がわかる／わからない、という２分法で考えるのは意味がない。「定義を復唱できる」「定理の証明を再現できる」「証明を自分で思いつける」「一般論を具体例について適用できる」から「新しい数学的事実を発見する」などまで多くの「わかりかた」があり、どれも意味がある。たとえば、証明がわからないときは、わからないまま写経のように単に写すだけでも自分の中で何かが変わる[1]。

また、プールに入って練習しない限り「泳ぎがわかる」ようにならないのと同じ様に、数学でも、実際に、計算したり絵を書いたり証明したり議論したりしない限り「わかる」ようにはならない。これを省くことは、水泳教室に通ってプールに入るのは面倒だと言って入らないのと同じ愚行である。

講義を聞いただけで数学がわかることはあり得ない。

残念ながら、数学科のカリキュラムはいろいろな事情で演習の時間が少なく、実習なしの水泳教室よようになっている。宿題を出したりこまめにテストをしたりして実習ができるように工夫をする講義も多いが、効果は余り期待できない。実習に相当するセミナーと計算機演習はぜひ活用してもらいたい。自主ゼミもとても効果がある。やってみようという人は教官のだれかに遠慮なく相談するとよい。

ある数学者が、数学科の教官は、学生と数学とをお見合いさせる仲人に過ぎない、と言っていた。数学は無口なので、みなさんと数学の会話は途切れがちなので、いろいろきっかけをつくるのに腐心する仲人の役割をするのが数学科の教官、ということだ。そういう意味で、これからの４年間に、みなさんのひとりひとりが自分にあった数学といい関係になる縁を提供することしか、私達数学科の教官にはできることはない。あとは、みなさんと数学の間だの個別的な縁が深まっていくことを祈るだけである。

[1]日本で最初のフィールズ賞受賞者小平邦彦も、証明がわかるまで証明を何度も文字どおり写したというのは有名な逸話である。

0.3 講義の各回の設計

講義は毎回次のように行う。

A. 基盤概念の解説

B. トピックの紹介［高校の数学との関係のあるもの］

C. 練習

D. 確認テスト

この中で C が最も重要だ。数学的議論を自分で完全に再現できるようになることを通して、数学の表現方法・証明の設計法などを体得してもらう。

なお、毎回一つの証明を取り上げ、宿題としてその証明を記憶し同じ方法で証明できる命題の証明を宿題にし、次週講義開始時にテストをする。

0.4 大学の数学についての誤解

0.4.1 厳密性についての誤解

議論の厳密性が重要になるのは、それによって繊細で豊かな議論が可能になるからである。「議論の厳密性」そのものが重要なわけではないし、また「絶対的な厳密性」というものはあり得ない。

この点を勘違いすると大学の数学科で何を学ぼうとしているのかということについて思い違いをすることになる。議論の到るところにある「あら」に気付くとき、「これでは厳密な議論ではないではないか」ということに捕われてしまう。現在の数学者達が「この程度の厳密性でいい」と思っている程度の「厳密性」を持った議論を修得することが最初の目標だ。

たとえば、最初に学習する「ϵ-δ 式議論」が重要なのは、それが、「どんどん近付く」よりも「厳密」だったり「精密」だったりするからではなく、それを使うことで初めて分析できることがあるからだ。もしも「どんどん近付く」で済む場合 (たとえば $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ のような場合) は ϵ-δ は必要ではない。高校で扱う極限は「どんどん近付く」で精密な議論が十分できるものである。

なお、「どんどん近付く」で済むことに ϵ-δ 式議論を行うことを最初はしばらくするが、その目的は、ϵ-δ 式議論に慣れるてもらうことであって、議論をより厳密にすることではない、くれぐれも誤解しないように。

0.4.2 論理性の誤解

「論理的にわかれば」わかったことになる、という考えでは数学の学習の仕方を違えます。

> 「子供は、本が存在する、椅子が存在する、といったように学ぶのではない。本を持ってくること、椅子に坐ること、を学ぶのである。」（ウィトゲンシュタイン全集９巻第 476 節.）

数学科では「定義から始めて議論をする」ということが鉄則だが、「定義」が「わかっても」それだけでは何もできない。「定義に基づいて議論をする」という部分は定義されていないために、定義を覚えても、定義に基づいて議論できるわけではないからだ。

「定義に基づいて議論する」や「定義に基づいて計算する」などという、定義しようがないことがあって、それがその定義に命を吹き込むのである。これは自分で（知的）手足を動かして少しずつ身につけていくしかないものである。

0.4.3 一般性の誤解

具体的命題より、数字を文字に変えて一般化した命題の方が内容が多いように見えるが、それは錯覚である。文字が入った一般的な命題に出会ったら、文字に具体的ものを代入して、命題を具体化することが不可欠である。文字に自明なもの（たとえば n に $0, 1, 2$ を代入うする ）を代入することでも「自明」な作業などではない。この作業を「自明」と考えて省けると考えるのは完全な間違いである。