目 次

1 数列の極限

無限数列についての議論の仕方をまず学ぼう。

1.1 数列の名前, 記号表示

(1) ある数列について論じるには、数列に名前がないと困る[1]。

(2) **無限数列** a（これは「名前が a である無限数列」の簡潔な言い回し）の中身を、a の入った記号で表示しなければ名前をつけた意味がない。a の i 番目にあらわれる数（これを**第 i 成分**または**第 i 項**という）を a_i とあらわす[2]. a_i の i を**添字**（index）という。

(3) 無限数列の名前としては文字 $a, b, c, \cdots$ を使い、添字としては i, j, k, ℓ, m, n を主につかう[3]。数列 a から派生するいろいろな数列を考えるときには、a',a'',

[1]数学では抽象的対象を扱うために、それを「表示する」記号（名前）をうまく選ぶことは議論や思考を進めるのに不可欠である。

[2]場合によて $a(i)$, $a[i]$, a^i, ${}_ia$, $\overset{i}{a}$ 等、いろいろな記号が使われる。とくに a^i は a の i 乗と思ってしまうことがあるので気をつける必要がある。

[3]この慣行には必然性はないが一定した記号の使い方に従うことがコミュニケーションの効率化にも、感覚的能力の活用にも、役立つ。役立つが**暗黙の了解**に頼るのは誤解の種となり危険なので、議論の中で新しい文字が最初に現れるときにはその文字の意味を言葉で**明示的に**言うことが必

$\tilde{a}$,a^* などの複合した記号を名前として使うこともある。

(4) 「数列 $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ を考えよう」[4] により

> これから無限数列を一般的に考察しよう。その名前を a とし、その i 成分を a_i と書こう

ということを表現する。

(5) $a=(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ における添字 i は**束縛変数**と呼ばれるものであり、どういう文字を使ってもよい。$(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ と $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ とは同じ数列をあらわす。

(6) **注意** 数列 $(a_2,a_3,a_4,\cdots)$ を考えるときには、これに a という名前は付けられない。そんなことをすると、a_2 という記号が、この数列の第 2 成分である a_3 を指すというあいまいさが生じてしまうからだ。この場合には、数列

$$b=(a_2,a_3,a_4,\cdots)$$

と書く必要がある。そうすると b の第 n 項である b_n が a_{n+1} を指すので混乱がない。

要である。

[4] これはいろいろな書き方がある。$(a_i|i\in\mathbf{N})$, $(a_i;i=1,2,3,\cdots)$, $(a_i)_{i=1,2,3,\cdots}$.

1.2 無限数列を具体的に与える方法

以上は、ある無限数列が＜目の前に＞あると想定したときに、それについてどのように話せばよいか、ということを論じてきた。しかし実際に＜無限数列を目前に持ってくる＞にはどうすればよいだろうか。これを考えないと「裸の王様」の衣装を論じているようなことになってしまう。

しかし、具体的な無限数列を与え方にはどうすればよいか、という問題は取りとめもないところがあり、ここでは、単に実際にどういう数列が数学で出現するのか、例を上げるにとどめる。

「無限数列を具体的に与える」とは、＜勝手な自然数＞ n が与えられたとき、n 番目の項をきめる方法を与えること、と解釈する。

- n 番目の項を与える＜数式＞を与える。
  - $1, 1, 1, 1, 1, \cdots$ $(a_n = 1)$,
  - $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ $(a_n = n)$,
  - $1, 2, 4, 8, 16, \cdots$ $(a_n = 2^n)$,
  - $1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$ $(a_n = (-1)^n)$
  - $1, 1/2, 1/3, 1/4, \cdots$ $(a_n = 1/n)$.
  - $1, 4, 27, 256, 3125, \cdots$ $(a_n = n^n)$.
- 数列を生成する規則を与える。
  - **漸化式.** a_1 を与え、a_n から a_{n+1} をきめる規則を与える。
  - n 番目の素数
  - $1, 4, 1, 5, 3, 2, 3, 8, 4, 6, 2, 6, \cdots$ (a_n は円周率 π の十進法展開の小数点以下 n 番目の数)
  - $1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \cdots$ (1 の間だに 0 を順番に数を増やしながら挟む)
- n ごとに決まる問題の解決如何に応じて「きめる」。
  - $0, 1, 1, 0, 0, 0, \cdots$ ($x^n + y^n = z^n$ が $x = y = z = 0$ 以外の解を持つとき $a_n = 1$ そうでないとき $a_n = 0$.)
- ランダム事象を使ってきめる。
  - $1, -1, 1, 1, -1, \cdots$ (コイン投げをして、n 回目に表がでれば $a_n = 1$ さもなければ $a_n = -1$)

1.3 数列の収束概念

数列が延びていくときその変化の仕方には想像をはるかに超えた多様性がある。たとえば、$n \to \infty$ のときの動きがいつまでも激しく残っているときは、その無限数列はわれわれの「理解を超えている」ものであるとさえ考えられる。しかし、（カオス理論のように）規則性が全くないこと自身に積極的意味を見い出す場合もある。

以下取り扱うのは「収束する」という振るまいである。これは、n が大きくなるにつれて変化が少なくなり、最後はある数に「どんどん近付く」という振るまいであり、変化の仕方の中で極めて特殊なものであるが、我々は収束する数列は「理解できた」「自分の支配下におくことができた」と考えることができる。

数列 (a_i) が a にどんどん近付くことを、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

とかいて、数列 $(a_n)_{n=1,2,3,\cdots}$ はa **に収束する**という。

「どんどん近付く」の素朴さが気になるかもしれないが、意味は明確である。たとえば、$(-1)^n$ は収束するはずはない。$1/n$ は 0 にどんどん近付くのはあきらかだ。

しかし、極限について少し複雑なことを示そうとすると「どんどん近付く」という表現ではすぐに議論ができなくなる。とくに「どんどん近付く」の否定がはっきりしないところに難点がある。ある人が「どんどん近付かない」と反論したくなるときに、それが何を意味するかがはっきりしないからだ。

「どんどん近付く」では扱えない場合　典型例としては、たとえば、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$$

か、という問題を考える。そうすると、上の定義ではこの問題には答えようがない（というのがおそらく「正しい」)。

もっとも、具体例については証明は可能なときもある。たとえば $a_n = 1/n$ のとき

$$\frac{1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n}{n} \le \frac{\log n}{n}$$

と評価して、$\frac{\log n}{n} \to 0$ を示せばよい。

しかし $1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, 1/3, 1/4, 1/4, \cdots$ のように、n 項目が n の式では簡単には表わせないような場合は、上の問題を示すことは容易ではなくなる。

1.4 収束概念の ε-δ による表現

数列 a が c にどんどん近付くことを、次のように言い換えていく。

E1 $\boxed{\text{あるところから先はほとんど } c \text{ と違わない.}}$

ここで「ほとんど違わない」という表現は、**誤差**[5]の許容範囲に依存している。誤差を小数点以下 10 位までしか見ないか、小数点以下 100 位まで見るかによって、「a_i が c とほとんど違わない」の意味が違う。そこで、この許容範囲をきめる正の実数を明示的に導入することにし、それを ε と書き、次のように言い換えることができる。

E2 どの正の実数 ε を誤差基準として選んでも、数列のあるところから先では、誤差 ε の範囲で、数列の成分は c と一致する。

「あるところから先では」をもっと明確に表現するために、**擬定常境界**という言葉を導入しよう。自然数 m が**数列** (a_i) **の** ε**-擬定常境界**とは

$$i > m \text{ ならば } a_i \approx_\varepsilon c$$

と定義する、ただし、$b \approx_\varepsilon c$ は $|b - c| < \varepsilon$ を意味する。そうすると $E2$ は次のように言い換えられる。

E3 どんな厳しい誤差基準 $\varepsilon > 0$ に対しても、ε-擬定常境界が存在する。

これをしばしば慣行の論理記号を用いて

E4 $\boxed{\forall\varepsilon > 0 \exists m \in \mathbf{N} \forall i > m [a_i \approx_\varepsilon c]}$

と書くことが多い。ここで $\forall\varepsilon > 0$ は「すべての $\varepsilon > 0$ に対し」の記号表現であり $\exists m \in \mathbf{N}$ は、「ある自然数 m が存在して」、$\forall i > m$ は「すべての $i > m$ なる i に対して」の略記である。したがって、上は

E4-b すべての $\varepsilon > 0$ である実数 ε に対し、ある自然数 m が存在して、すべての $i > m$ である自然数 i について $a_i \approx_\varepsilon c$ が成り立つ

を記号であらわしたものである。しかし、**E4-b** の表現には無数の多様性があるので[6]、記号による**E4** という表現がかなり確定していて便利である。

さて、**E3** から**E4** の書き換えで何も実質的には変質していいように見えるが、実は重要な情報がなくなっている。

---

[5] a_i と c のズレ

[6] たとえば

E4-c どんな正の実数 ε に対しても、適当な自然数 m を選べば、m より大きなその自然数 i についても $a_i \approx_\varepsilon c$ となる。

なくなったものは「ε が誤差基準を意図したものである」「m が擬定常境界 を意味する」などの（意図についての）情報である。§1.6節で説明するように、論理記号による表示 $E4$ から $E3$ の意図を「回復する」ことは、かなりの訓練が必要な作業である。しかし、この作業は数学的には余り深い意味のないことなのである。従って $E4$ という表示は、収束の定義として論理的には完全でも数学として不完全なものであると考えなければならない。言い換えると、定義**E4**を＜論理的に＞かったとしても、＜数学的な意味＞はそこから論理的に帰結できないのである。だから、定義を睨んでいても一歩も前に進めるものではなく、その後の議論を通して、その定義の数学的な意図を了解することが重要である。

1.5 変数の名前の重要性

上で ε を誤差基準、m を擬定常境界と呼んだ。これらは論理的には必要のないものであるが、「数学的行為」にはきわめて重要なことである。もちろん、この名前の付け方は勝手だし、実際に「誤差基準」や「擬定常境界」などという言葉が普遍的に使われているわけではない。しかし、この名前をつけることで、日常言語で数学を議論することが可能になる。日常言語で数学を議論しようとすることは数学を生きたものにするために有効な姿勢である。

1.6 $\forall\exists\forall\cdots$ とゲームの必勝法

$\forall, \exists$ が交互に並ぶ論理式で表現される概念や命題が数学的に何を意味するのかを悟るには独自の訓練が必要である。この訓練は大学の数学ではさけることはできないが、数学的にはそれほど深い意義のあることではない。意義があるのは、意図を知った上での定義の「必然性」を了解することであろう。ある意図のためには、この定義でなければばならない、と納得できることが、定義がわかるということである。

しかし、いくつかの数学の教科書では、「論理的表現から意図を洞察することが数学的に重要である」であるという立場をとっていて、意図についての説明は単におまけのようにしか与えられないこともあるし、場合によっては全く与えられないことさえある。定義から意図がユニークに決まるものではないので、この立場は間違っていると私は思う。しかし、実際にはこういう教科書があるという現状を考慮し、「通常の意図を読み取る」訓練は最低限受けておかなければばらない。しかし、しつこいかもしれないが、この訓練を修得したからといって、この訓練で得たものが何か重要なものであるかのような錯覚を持たないように気をつけていただきたい。

ここでは $\forall\exists\forall\cdots$ という論理形式を持つ概念の意図を「見抜く」ことを容易にする一つの方法を説明する。

このタイプの論理構造を持った概念を扱うときに有効なのは、$\forall x$ は変数 x が相手の手であり $\exists y$ は変数 y が君の手であることを意味するという考え方である。

今、$Win_2(x,y)$ は（x, y という手が選ばれた時）後手が勝ち、を意味するものとする。君が後手のとき

- $\forall x\exists y[Win_2(x,y)]$ は、相手がどういう手 x を出しても君が勝てる手 y がある、ということで後手必勝を意味する。

- $\forall x\exists y\forall z[Win_2(x,y,z)]$ も同様である。相手がどういう手 x を出しても君がうまい手 y を選ぶと、それに対して相手がどのような手 z をだしても君の勝ちである、ということを意味する。

また、君が先手の場合には、$Win_1(x)$,$Win_1(x,y)$ などは（x, y という手が選ばれた時）先手が勝ちをあらわすと、

- $\exists x[Win_1(x)]$ は、君がうまい手 x を出せば勝てる、ということで先手必勝を意味する。

- $\exists x\forall y[Win_1(x,y)]$ も同様である。君が最初うまい手 x を選ぶと、それに対して相手がどのような手 y をだしても君の勝ちである、ということを意味する。

さて我々の例の場合に、$\forall\varepsilon > 0$ は ε は敵が決めるもので、君では制御できないことを意味し、$\exists m$ は m は君が決めるもので、君の都合のよいものを一つ選べば良いことを意味する。$\forall i > m$ は相手が i を勝手に選べるものであるが、ただし君が選んだ m よりは大きいという制約付である。

1.7 例

$a_n = 1/n$ が 0 に収束するのは当たり前だが、これは上のような議論ではどのようになるだろうか。

このゲームでは君は

- 敵が誤差基準 ε を呈示してきたとき
- 君はある番号 m をうまくとって
- 敵が、それよりも大きな i を勝手に選んでも、a_i が誤差水準 ε の下では 0 となる

ようにすることが目標となる。

ここで重要なのは、敵が本気ならば、 ε をなるべく小さくして君を邪魔するようにするということである。なぜならば、ある ε で敵が君に負けるならば それよりも大きな ε ではもちろん敵は負けてしまうから、敵は ε を小さい方向に持っていくことしか意味がないことからわかる。だから、「任意の正の数 ε 」と言っても、今のゲームで焦点となるのはなるべく小さな ε なのである。

一方、君の方では、m をなるべく大きな方で探すべきであることもわかる。m でだめなら、m をそれよりも小さくしてもだめなことは明らかだから。

一般に、問題ごとで真剣な敵が見つける嫌な手は違っており、ゲーム $\forall x \exists y$ における $\forall x$ の「こころ」は、真剣な先手が何をするかを考えて初めて見えてくる。そして $\exists y$ なる y を探すとき後手の君は、君にとって嫌な手 x を先手が選んだとして考えなければならない。

ここでは、先手・後手・先手の手 (ε, m, i) に対する $|1/i| < \varepsilon$ という勝ち基準が目標である。

先手の ε に対し、$1/m < \varepsilon$ となる m を君が選ぶ。すると、$i > m$ という制約付きで先手が手 i をどのように選んでも、

$$|1/i| < 1/m < \varepsilon$$

であるから、後手である君の勝ちとなる。

1.8 収束しないのはどういうときか

「どんどん近付く」では否定の意味があいまいであったが、新しい収束の定義では否定の意味は明確になったかどうかを吟味してみよう。

ある数列 a が c に収束しないのはどういうときか。これは、ゲームのたとえでいうと、敵が嫌な手を出すと君は勝てなくなる、ということである。すなわち

- 敵が厳しい誤差基準 ε を呈示すると、
- 君がどんなに大きな擬定常圏 m を指定しようとしても、
- 敵は、その中に $a_i \not\approx_\varepsilon c$ となる i を見つけることができる、

という明確な表現が「a が c に収束しない」に与えられる。

たとえば数列 $a_n = 1/n$ は 1 に収束しない。なぜか。誤差基準として 1/2 を選ぶと、

P 「どんなに m を大きくとっても、 $i > m$ であるのに $|a_i - 1| > 1/2$ となるような i がある」, すなわち、

$$\forall m \exists i [|a_i - 1| > 1/2]$$

注意 このP を気持ち悪く感じる人もいるのではないか。もっと強いこと

P2 $a_i = 1/i$ なのだから、$i > 2$ ならば $|1 - a_i| = |1 - 1/i| > 1/2$, すなわち

$$\forall i > 2 [|a_i - 1| > 1/2].$$

も正しいのである。これよりもはるかに薄まった内容の**P** を述べる意義がわからないので気持ちが悪いのではなかろうか。

しかしよく考え見ると、主張 **P2** 自身が、$\forall i [a_i = 1/i]$ という事実を、薄めた内容である。

この例から次のことを了解してほしい。

> 何のためにあることを主張するか、ということ抜きには、何かを主張することの意義は理解できない.

P 自身を孤立して見れば自明すぎて馬鹿げた主張である。しかし、これは a_n が 1 には収束しないという目標下の議論においては、鍵となる主張なのである。

1.9 証明の「メタ規則」の例

(P.1) **背理法.** P を示したいとき、P の否定を仮定して矛盾を導く。

(P.2) **場合分け.** P を示したいとき、$R \Rightarrow P$ と $\neg R \Rightarrow P$ を示せばよい。（R はなんでもよい。）

(P.3) $P \Rightarrow Q$ を示したいときは、P が正しいと仮定して Q を示す。

(P.4) 仮定 $\forall x P(x)$ の利用法：具体的な a について $P(a)$ が正しいことを主張するのに使う。

(P.5) 仮定 $\exists x P(x)$ の利用法：「$P(x)$ を満たす x を一つ選び a とする」。ここで**新しい文字を導入する**ことが鍵である。

(P.6) $\forall z[Q(z)]$ の示しかた：z という真新しい変数（他には使われていないもの）を導入して議論を進めて $Q(z)$ が示す。

(P.7) $\exists z[Q(z)]$ の示しかた

(a) $Q(t)$ を満たすモノ t を見つける。

(b) 背理法による証明：ないとして矛盾を導く。つまり「ないとすると矛盾するので存在する」[7]。

[7] この証明を認めない人が少なくない。しかし現在の学科教育では可とする。

1.10 証明の練習

例 1 $\lim_n a_n = c$ ならば $\lim_n 2a_n = 2c$.

これは内容的には明らかだが、ε-δ 方式によるの収束の定義では、次を示すことになるのでそれほど明らかではない。

$$\boxed{\forall\varepsilon\exists N\forall m \geq N[|a_m - c| < \varepsilon] \Rightarrow \forall\varepsilon\exists N\forall m \geq N[|2a_m - 2c| < \varepsilon]}$$

証明 1.

$$\forall\varepsilon_1\exists N_1\forall m_1 \geq N_1[|a_{m_1} - c| < \varepsilon_1] \tag{1}$$

と仮定する。ε を正の実数とする。

$$\forall m > N\ [\ |2a_m - 2c| < \varepsilon\ ] \tag{2}$$

を満たす N があればよい。(2) は

$$\forall m > N\ [\ |a_m - c| < \frac{1}{2}\varepsilon\ ] \tag{3}$$

と同じである。ここで (1) を、$\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ に適用すれば、

$$\exists N_1\ \forall m_1 \geq N_1\ [\ |a_{m_1} - c| < \varepsilon/2\ ] \tag{1'}$$

が成り立つ。従って、

$$\forall m_1 > N_1;[\ |a_{m_1} - c| < \varepsilon/2\ ] \tag{1''}$$

を満たす N_1 が存在する。m_1 は束縛変数なので、これは (3) と同じ条件である。

以上により、何の制限もない $\varepsilon > 0$ に対し (2) を満たす N がみつかったので

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall m > N\ [\ |2a_m - 2c| < \varepsilon\ ]$$

が示された。

以上により $\lim_n a_n = c$ ならば $\lim_n 2a_n = 2c$ となることが示された。 **証明終.**

証明2. $\varepsilon > 0$ とする。$\lim_n a_n = c$ すなわち、

$$\forall \varepsilon_1 \; \exists N \; \forall m_1 \geq N \; [\; |a_m - c| < \varepsilon_1 \;]$$

を $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ に適用すると

$$\exists N \; \forall m_1 \geq N \; [\; |a_m - c| < \varepsilon/2 \;].$$

これはどの $\varepsilon > 0$ についても成り立つので

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall m_1 \geq N \; [\; |a_m - c| < \varepsilon/2 \;].$$

書き直すと

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall m_1 \geq N \; [\; |2a_m - 2c| < \varepsilon \;].$$

すなわち $\lim_n 2a_n = 2c$. **証明終.**

1.11 ε-δ の証明の流れの分析

$\forall \varepsilon_1 \exists N_1 [P(\varepsilon_1, N_1)] \Rightarrow \forall \varepsilon \exists N [R(\varepsilon, N)]$ の示しかたの流れ：

(A) $\forall \varepsilon_1 \exists N_1 [P(\varepsilon_1, N_1)]$ とする。

(B) ε を任意に選ぶ。

(C) ε_1 を任意に選ぶ。

(D) 仮定 (A) より $P(\varepsilon_1, N_1)$ を満たす N_1 を一つ選ぶ。

(E) $R(\varepsilon, N)$ を満たす N を ε_1, N_1 を使って作る。それができる ε_1 には制約があることがふつうである。適合する ε_1 の一つを ε_1' とすると、**(C)** で ε_1 を選ぶとき、ε_1' を選んだとしておいてよい。
前節の例では、$R(\varepsilon, N)$ が $\forall m > N[|2a_m - 2c| < \varepsilon]$ だが、この場合は $\varepsilon_1' = \varepsilon/2$ ならば $N = N_1$ とできる.

(F) したがって $\exists N [R(\varepsilon, N)]$ が結論される。

(G) ε は任意であったから $\forall \varepsilon \exists N [R(\varepsilon, N)]$ が成り立つ。

(H) [A] を仮定して [G] が示されたので

$$\forall \varepsilon_1 \exists N_1 [P(\varepsilon_1, N_1)] \Rightarrow \forall \varepsilon \exists N [R(\varepsilon, N)]$$

示された。

上で [E] は「発見的推論」と呼ばれているもので、純粋に論理的な証明としては次ぎのように「消去できる」: あらかじめ上の（予備的）推論を行った後で、ε'_1 をメモしておいて、次のように行う。

(A) $\forall\varepsilon_1\exists N_1[P(\varepsilon_1, N_1)]$ とする。

(B) ε を任意に選ぶ。

(D) 仮定 (A) より $P(\varepsilon'_1, N_1)$ を満たす N_1 を一つ選ぶ。

(E) このとき、$R(\varepsilon, N)$ となる N が存在する。

(F) したがって $\exists N[R(\varepsilon, N)]$ が結論される。

(G) ε は任意であったから $\forall\varepsilon\exists N[R(\varepsilon, N)]$ が成り立つ。

(H) [A] を仮定して [G] が示されたので

$$\forall\varepsilon_1\exists N_1[P(\varepsilon_1, N_1)] \Rightarrow \forall\varepsilon\exists N[R(\varepsilon, N)]$$

示された。

このように舞台裏を隠した証明が「エレガント」であると勘違いしないようにして欲しい。これでは証明の肝心な部分が伝わっていない。

1.12 今日の練習問題

命題１.

$$\forall\varepsilon > 0[|x - y| < \varepsilon] \text{ ならば } x = y.$$

命題２.

$$\forall\varepsilon > 0[x < y + \varepsilon] \text{ ならば } x \leq y.$$

命題３.

$$\lim_n a_n = c \text{ ならば } \lim_n a_n^2 = c^2.$$

来週の講義の最初に命題１の証明をテストします。

(1999.4.15 Ver 1.0)