10 第10回：同値関係

きょうの予定

- 「関係」の外延的記述
- 同値関係
- 同値関係の例

10.1 2項関係の数学的扱い

10.1.1 2項関係の例

2つのモノの間の関係を2項関係という。例えば

[例 1] テツはチエの親である。親 (テツ、チエ)

[例 2] サルはヒトの先祖である。先祖 (サル、ヒト)

[例 3] サルはヒトとは親戚である。親戚 (サル、ヒト)

[例 4] 三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は合同である:$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

[例 5] 直線 ℓ, m は平行である。$\ell // m$.

[例 6] 直線 ℓ, m は直交する。$\ell \perp m$.

[例 7] 有向線分 AB と PQ は平行移動で重ねられる。$\overrightarrow{AB} \, // \, \overrightarrow{PQ}$.

[例 8] 3 は 5 より小さい。$3 < 5$.

[例 9] 143 は 1001 の約数である。$143 \mid 1002$.

[例 10] 31 と 66 の差は 7 で割れる。$31 \equiv 66 (\mod 7)$.

[例 11] pre は $prepare$ の接頭語である。$pre \preceq prepare$

10.1.2 2項関係の表記法

2項関係について一般的な話をするときは、それに名前をつける。たとえば R がよくつかわれる。x, y が関係 R を持つ、ということを、次の3通りに表現する。

1. $R(x,y)$ (数理論理学で使われる、３項以上の関係ではこれが使われる)
2. xRy (中置記法,infix notation、普通一番よく使われる)
3. $(x,y) \in R$ （外延的に関係を考えるときは、これが基本）

実際には x,y を入れる場所が指定してあればよい。$31 \equiv 66 \pmod 7$ もそのような例である。

10.1.3 ２項関係の性質

反射性	$\forall\, x\ [\ xRx\ ]$
対称性	$aRx \;\Rightarrow\; xRa$
反対称性	$a \neq x \;\wedge\; aRx \;\Rightarrow\; \neg\, xRa.$
推移性	$aRx \;\wedge\; xRb \;\Rightarrow\; aRb.$

表 1: 2 項関係の記述法

２項関係	記号	反射性	対称性	反対称性	推移性
親子関係	親 (x,y)	×	×	◯	×
先祖関係	先祖 (x,y)				
親戚関係	親戚 (x,y)				
要素関係	$x \in A$				
包含関係	$A \subseteq B$				
３角形の合同関係	$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$				
平行関係	$\ell // m$	△	◯	×	◯
垂直関係	$\ell \perp m$				
有向線分の平行	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$				
大小関係	$x < y$				
大小関係 数の合同関係	$x \leq y$ $x \equiv y \pmod 7$				
整除関係	$x \mid y$				
接頭語関係	x は y の接頭語				

表 2: 練習問題：例に挙げた 2 項関係の性質を考えてみよう.(持つ:◯, 持たない:×, 解釈による △). 解答は表 4

2 項関係	記号	反射性	対称性	反対称性	推移性
親子関係	親 (x,y)	×	×	◯	×
要素関係	$x \in A$	×	×	◯	×
垂直関係	$\ell \perp m$	×	◯	×	×
大小関係	$x < y$	×	×	◯	◯
先祖関係	先祖 (x,y)	△	×	◯	◯
接頭語関係	x は y の接頭語	△	×	◯	◯
大小関係	$x \leq y$	◯	×	◯	◯
整除関係	$x \mid y$	◯	×	◯	◯
包含関係	$A \subseteq B$	◯	×	◯	◯
親戚関係	親戚 (x,y)	△	◯	×	◯
平行関係	$\ell // m$	△	◯	×	◯
有向線分の平行	$\vec{AB} \,//\, \vec{PQ}$	◯	◯	×	◯
3 角形の合同関係	$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$	◯	◯	×	◯
数の合同関係	$x \equiv y \pmod 7$	◯	◯	×	◯

表 3: 例に挙げた 2 項関係の性質. 並べ変えたもの

10.2 同値関係

等号 $=$ は 2 項関係 $x = y$ として

- 反射性
- 対称性
- 推移性

を持つ。そこで、これらの性質を持つ 2 項関係は**同値関係**(equivalence relation) と呼ばれる。$x \sim y$ という記号が頻用される。

10.2.1 同値関係の意義

「ある尺度によって、違ったものを同じと見なす」ことは、数学的に言うと、同値関係を決めることになる。 その尺度で x, y は「同じ」と見ることを $x \sim y$ と表現するならば、「同じ」という言葉の意味は「2 項関係 $\sim$ は同値関係である」という言い方で明確にできる。

逆に、同値関係 $\sim$ が一つあると、異なる 2 つのものを同じと見る見方ができる。

日常使われる「同じ」という言葉には、同値関係のようなものが背景にあると想定はできる。(とはいえそれを正確に同定することなどできないし無意味である。)

10.2.2　分類から生じる同値関係

あるものの集まりが分類されているとき、x, y が同類であることを表す 2 項関係は同値関係である（これは当たり前）。分類は同値関係を定める。以下、逆も正しいことを見る。

10.3　同値関係から生じる分類

逆に、同値関係は分類を与える。今 $\sim$ を集合 X の上の同値関係であるとする。

10.3.1　同値類

$x \sim y$ のとき x, y が同類（同値とふつうはいう）である言おう。X の部分集合 C が一つの同値類 (equivalence class) であるとは、

- その要素は互いに同類、
- その要素と同類なものは皆 C に入っている

ことを言う。すなわち、

- $\forall x, y \in C\ [\ x \sim y\ ]$
- $\forall c \in C\ x \in X\ [x \sim c\ \Rightarrow\ x \in C]$.

例　$X = \mathbf{N}$ とし、$x \sim y \overset{def}{\iff} x - y$ は 2 で割れる とする. 偶数全体のなす集合 E は一つの同値類になり、奇数全体のなす集合 O も一つの同値類となる。これは

$$\mathbf{N} = E \bigcup O \qquad E \bigcap O = \emptyset$$

を満たす。すなわち $\mathbf{N}$ は E と O に**分割**される。

10.3.2　サンプルが決める同値類

一つの要素 a をサンプルとして決めて、これと同類のものを全部集めたものを $[a]$ と表す。たとえば、$X = \mathbf{N}$ とし、$x \sim y \overset{def}{\iff} x - y$ は 2 で割れる とするとき、$[0]$ は偶数の全体となり、$[1]$ は奇数の全体となる。

命題 10.1 $[a]$ は同値類である。

証明. まず、$[a]$ の要素は互いに同類であることをしめす。$x, y \in [a]$ とする。定義より、

$$a \sim x \tag{1}$$

かつ

$$a \sim y \tag{2}.$$

(1) と対称律より

$$x \sim a \tag{3}.$$

(2),(3) と推移律より、$x \sim y$.

次に $[a]$ の要素と同類なものは $[a]$ に属すことを示す。$x \in [a]$ かつ $x \sim y$ とする。定義より、$a \sim x$. よって、推移性より $a \sim y$. ゆえに $y \in [a]$. 証終

命題 10.2 同値類 $C \subseteq X$ とその任意の要素 c について $C = [c]$ が成り立つ.

証明. まず、$[c] \subseteq C$ を示す。$x \in [c]$ とする。定義より $c \sim x$. C は同値類で $c \in C$ なので $x \in C$ となる。ゆえに $\forall x[x \in [c] \Rightarrow x \in C]$.

次に $C \subseteq [c]$ を示す。$x \in C$ とする。$c \in C$ より $c \sim x$. よって $x \in [c]$. ゆえに $\forall x[x \in C \Rightarrow x \in [c]]$. 証終

系 10.3

$$[a] = [b] \iff a \sim b.$$

証明. $[a] = [b]$ とする。$a \in [a] = [b]$ より $a \sim b$.

逆に　$a \sim b$ とする。このとき、$b \in [a]$ かつ $[a]$ は同値類だから、$[a] = [b]$. 証終

10.3.3 同値関係が定める分割

定理 10.4 集合 X 上の同値関係 $\sim$ があるとき、X はその同値類に分割される。すなわち、どの要素もただ一つの同値類に属す。

証明. どの要素 $x \in X$ も同値類 $[x]$ に属す。ある同値類 C が x を含むとき、命題 10.2 により $C = [x]$. 証終

10.4 同値類集合 $X/\sim$ と商写像 $\pi : X \to X/\sim$

同値類の全体を**同値類集合**といい $X/\sim$ と表す。同値関係 $\sim$ による集合 X の商集合ともいう。

要素を、それが属する同値類に対応させる写像 $\pi : x \mapsto [x]$ を**商写像**という。

例

1. （インフォーマル）X を実際の動物の集まりとし、$\sim$ を同じ族に属するという同値関係とすれば、$X/\sim$ は属全体の集まりということができる。たとえば「犬」や「猫」などの種がその要素となる。
2. $\mathbf{N}$ 上の $x \sim y \overset{def}{\iff} x \equiv y \pmod 3$. この場合、
$$\mathbf{N}/\sim = \{\ [0], [1], [2]\ \}.$$
3. X を平面上の直線全体とし $m \equiv \ell \overset{def}{\iff} m//\ell$ とする。このとき $X/\sim$ は原点を通る直線の全体と 1 対 1 に対応する。
4. 平面上の有向線分について平行移動で重ね合わされるという条件で同値関係を定める。ベクトルはこの同値関係についての同値類である。同値類集合は原点を始点とする有向線分の全体と自然に全単射である。

10.4.1 完全代表系

数学科での学習の中では心理的困難を伴う筆頭が「同値類集合」の扱いである。「抽象的存在」である一つの同値類 C について議論するときは、そこに属する具体物 $x \in C$ を使って議論するしかないが x の特殊性を使ってはいけない。この特殊と普遍とを分離できない点が心理的な障害となると思われる。

「同値類」を心理的に考えやすく方法の一つが、各同値類にその「代表元」を指定するものである。

$(X, \sim)$ を同値関係とするとき、$R \subseteq X$ が**完全代表系**であるとは、

(R1) R の 2 元は同類ではない。i.e.
$$x, y \in R \ \wedge\ x \sim y\ \Rightarrow\ x = y,$$

(R2) X のどの要素も R の要素と同類である.i.e.
$$\forall x \in X\ \exists a \in R\ [\ x \sim a\ ].$$

写像 $\pi|R\ :\ R \ni c \longmapsto [c] \in X/\sim$ が単射であることが条件 (R1) 、全射であることが条件 (R2) である。

例

- 同じ国の国民であるという同値関係を考えるときは、各国の元首の全体が（元首が決まっているとすれば）完全代表系を与える。

- $\mathbf{N}$ 上の $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} 3|x-y$. この場合 $\{\ 0,1,2\ \}$ は完全代表系である。他にも $\{\ 10,20,30\ \}$,$\{\ -1,0,1\ \}$ などの代表系がある。
- ベクトルの場合は、原点を始点とする有向線分が完全代表系をなす。
- 直線についての平行関係の場合は、原点を通る直線が完全代表系をなす。

定理 10.5 同値関係は完全代表系を持つ。

証明. それぞれの同値類 C から一つ元 x_C を選び、それをあつめて R とすればよい。
証終

完全代表系があるとき、それぞれの要素 x をそれと同類である代表元に対応させる写像 $X \to R$ が定義される。これは商写像と「同じ役割」を果たす。

ただし、完全代表系の取り方はたくさんある。

10.5 分類問題

数学の多くの問題が $(X,\sim)$ が与えられたとき

同値問題 $x,y \in X$ が与えられたとき $x \sim y$ か否かを判定せよ。

分類問題 $X/\sim$ を求めよ。

などが主要な問題となることが多い。

同値問題には大きくわけて 2 通りのアプローチがある。

- **不変量.** 同類ならば同じ値をとるような関数を**不変量**という。不変量 χ が完全であるとは、
$$x \sim y \iff \chi(x) = \chi(y).$$
商写像は完全不変量である。
- **標準形.** 同類の範囲での変形方法 $x \to y$ を探す。もはや変形できないもの全体が完全代表系をなせばよい。

同値問題の進歩は分類問題の進歩に先行する。

10.6 宿題

1. 実数上の次の 2 項関係は反射性・対称性・反対称性・推移性のどれを持つか。
 (a) $xR_0y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x+y=1.$
 (b) $xR_1y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x+y>1.$
 (c) $xR_2y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x^2=y^3.$
 (d) $xR_3y \overset{def}{\Longleftrightarrow} xy=0.$
 (e) $xR_4y \overset{def}{\Longleftrightarrow} xy\neq 0.$
 (f) $xR_5y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x\geq y^2.$

2. 実数の上で $x\sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x-y$ は整数 と定義する。
 (a) これは同値関係となることを示せ。
 (b) 同値類 $[\pi]$ は何か。
 (c) 完全代表系を一つ求めよ。

3. 平面 $\mathbf{R}^2$ の上で $P\sim Q \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists r\in\mathbf{R}[r>0\wedge P=r.Q$ と定義する。
 (a) これは同値関係となることを示せ。
 (b) 同値類 $[(0,1)]$ は何か。
 (c) 完全代表系を一つ求めよ。

2項関係	記号	反射性	対称性	反対称性	推移性
親子関係	親 (x,y)	×	×	◯	×
先祖関係	先祖 (x,y)	△	×	◯	◯
親戚関係	親戚 (x,y)	△	◯	×	◯
要素関係	$x \in A$	×	×	◯	×
包含関係	$A \subseteq B$	◯	×	◯	◯
3角形の合同関係	$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$	◯	◯	×	◯
平行関係	$\ell // m$	△	◯	×	◯
垂直関係	$\ell \perp m$	×	◯	×	×
有向線分の平行	$\vec{AB} = \vec{PQ}$	◯	◯	×	◯
大小関係	$x < y$	×	×	◯	◯
大小関係	$x \leq y$	◯	×	◯	◯
数の合同関係	$x \equiv y (\mod 7)$	◯	◯	×	◯
整除関係	$x \mid y$	◯	×	◯	◯
接頭語関係	x は y の接頭語	△	×	◯	◯

表 4: 表 2 の答え