11 第１１回：同値関係 (2)

きょうの予定

- 同値関係を保つ写像
- 同値関係を保つ演算
- "well-defined" の示し方

11.1 同値関係を保つ写像

集合 X に同値関係 $\sim$ があるとしよう。写像 $f : X \to Y$ が**同値関係** $\sim$ **を保つ**とは同類は同じ f-値を持つこと、すなわち

$$\boxed{\forall x, y \in X \ [\ x \sim y \ \Rightarrow f(x) = f(y)\ ].}$$

[例 1] ２つの三角形 $\triangle ABC, \triangle DEF$ が合同変換が重ねられるときに

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

と定義する。ただし、必ずしも A, B, C が各々D, E, F に重なるようにする必要はないとする。

(a) 三角形に面積を対応させる写像は、合同関係を保つ。すなわち $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ならば $\triangle ABC$ の面積 $=$ $\triangle DEF$ の面積.

(b) 三角形 $\triangle ABC$ に３辺の長さ (AB, BC, CA) を対応させる写像は、合同関係を保つとは限らない。

(c) 三角形 $\triangle ABC$ に、辺の長さを大きい順に並べた数 (ℓ, m, n) を対応させる写像は、合同関係を保つ。

[例 2] 実数の集合 $\mathbf{R}$ に同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x - y \text{ は整数}$$

と定義する。この同値類集合は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と書かれる。写像 $x \mapsto f(x) := \sin(2\pi x)$ は同値関係を保つ。（これは f が周期 1 の周期関数であることを意味する。）

しかし、写像 $x \mapsto x^2$ は同値関係を保たない。

11.2　同値関係を保つ写像が引き起こす写像

写像 $f : X \to Y$ が X 上の同値関係 $\sim$ を保つとする。このとき、f から、別の写像 $\widetilde{f} : X/\sim \to Y$ を

$$\widetilde{f}([x]) := f(x) \tag{1}$$

により定めることが**できる**。

ここで「定める」ではなく「定めることができる」と言わなければならないわけは、$\widetilde{f}$ の「定義もどき」(1) で使っている同値類の $[x]$ という表示を別の表示 $[y]$ に変えたときに右辺が違うものになるときは、$\widetilde{f}$ は定義されたことにならないからである。

たとえば、上の例 2 で考えるとき、写像 $f : x \mapsto x^2$ は

$$\widetilde{f}([0]) = 0 \neq 1 = \widetilde{f}([1]).$$

となってしまい、「定義もどき」(1) は定義にはならない。

重要　.「定義もどき」(1) が定義であるということを、(1) により写像 $\widetilde{f}$ は**well-defined である**（「ちゃんと定義されている」）という。「**(1) は代表元 x の取り方によらないので $\widetilde{f}$ が定義される**」という言い方もする。

これは**定義が証明を要する例**の中で最もよく出会うものである。数学的対象の定義が証明を要する状況はだいたい次のようなものである。「いくつかの条件 (ここでは (1)) で数学的なモノ (ここでは $\widetilde{f}$) を定めるようとするとき、その条件が多すぎる場合には、そのモノがあるクラスの数学的対象 (ここでは写像) として本当に存在するのとは限らない。」

$$\boxed{\text{式 (1) により } \widetilde{f} \text{ が well-defined} \iff f \text{ は} \sim \text{を保つ。}}$$

例　例 2 の状況で、写像 $x \mapsto f(x) := \sin(2\pi x)$ は写像 $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ を定める。

11.3　同値関係を保つ多変数関数

変数が 2 つ以上の写像についても同じような概念がある。

集合 X 上に同値関係 $\sim$ があるとする。写像 $f : X \times X \to Y$ が**同値関係 $\sim$ を保つ**とは、

$$\forall a, a', b, b' \in X \; [\; a \sim a' \text{ かつ } b \sim b' \text{ ならば } f(a,b) = f(a',b') \;].$$

写像 f を用いて

$$\widetilde{f}([x],[y]) := f(x,y)$$

により写像

$$\widetilde{f} : X/\sim \; \times X/\sim \; \longrightarrow \; Y$$

が定義される。

11.4　同値関係を保つ演算

集合 X 上に同値関係 $\sim$ があるとする。写像 $f : X \times X \to X$ が**同値関係 $\sim$ を保つ**とは、

$$\forall a, a', b, b' \in X \; [\; a \sim a' \quad \text{かつ} \quad b \sim b' \quad \Rightarrow \quad f(a,b) \sim f(a', b') \;]$$

例　$\mathbf{Z}$ 上の同値関係である、p を法とする合同関係 $x \equiv y \mod p$ を考える。この同値類集合を $\mathbf{Z}/p.\mathbf{Z}$ と書く。

このとき、加減乗算は皆、合同関係を保つ: $a \equiv a' \mod p$ かつ $b \equiv b' \mod p$ ならば

$$a + b \equiv b + b' \mod p \qquad a.a' \equiv b.b' \mod p.$$

これより、$\mathbf{Z}/p.\mathbf{Z}$ には次の式で和と積が定義される。

$$[a] + [b] := [a + b] \qquad [a].[b] := [a.b].$$

11.5　宿題の解答例

1. 実数上の次の 2 項関係は反射性・対称性・反対称性・推移性のどれを持つか。

2 項関係	反射性	対称性	反対称性	推移性
$x + y = 1$	×	○	×	×
$x + y > 1$	×	○	×	×
$x^2 = y^3$	×	×	×	×
$xy = 0$	×	○	×	×
$xy \neq 0$	×	○	×	○
$x \geq y^2$	×	×	×	○

上は 2 項関係が定義されている場所を実数全体として解答した。しかし、実数の部分集合で見るとき、性質が変わる。例えば

1. $x + y > 1$. これは $(1/2, \infty)$ 上では反射性を持つ。
2. $\mathbf{R} \setminus \{\, 0, -1 \,\}$ では $x^2 = y^3$ は反対称性を持つ。
3. $x \geq y^2$ は $[1, \infty)$ では反対称性を持ち、$[0, 1)$ では反射性を持つ。