2 第２回：論理式の扱い方

注意. 資料は講義の進行に合わせて作っているので、章立ては、内容的に即しているわけではない。

きょうの予定

- 数学的命題の疑似論理式による表現
- 証明の仕方の基本型
- 練習

2.1 基礎になる論理式

例えば

- 3 は偶数,
- x は偶数,
- x は無理数,
- $x < y$,
- x の 2 辺の長さは等しい,
- $x \in A$.

x, y は変数と呼ばれる。

2.2 複合論理式

P, Q, R が論理式、x が変数、A が集合のとき次も論理式：

- $P \wedge Q,\quad P \vee Q,\quad P \Rightarrow Q,\quad \neg P,$
- $\forall x \in A\ P,\quad \exists x \in A\ P.$

$\forall x \in A\ P$ の P を**限定記号**(quantifer) $\forall x \in A$ の**影響範囲**と呼ぶ。同様に、$\exists x \in A\ P$ の P を**限定記号** $\exists x \in A$ の**影響範囲**(scope) と呼ぶ。限定記号の影響範囲は広い場合があるので、それがわかるように適当な工夫が必要である。

限定記号 $\forall x \in A$ または $\exists x \in A$ の影響範囲にある変数 x は、その限定記号に**束縛されている**(bound) という。どの限定記号にも束縛されていない変数は**自由である**(free) という。

2.3　論理演算記号の強さ

$+, -$ は $\times, /$ よりも結合度が弱いときめることにより、数式の表示から括弧を減らすことができる。

論理記号でも同様に、結合度の強弱を入れて、括弧を減らす。次の順に弱くなるときめる。

- $\neg$
- $\wedge, \vee$
- $\Rightarrow$
- $\forall x \in A, \exists x \in A$

従って、

$$\forall x \in A\, \neg P \ \wedge\ Q \ \Rightarrow\ \exists y \in B\ P \ \vee\ Q$$

は

$$\forall x \in A(((\neg P) \wedge Q) \Rightarrow (\exists y \in B(P \vee Q)))$$

を意味する。

同じ記号の並びでこれ以外の意味を表すには括弧を使わないといけない。例えば、

$$(\forall x \in A\, \neg P\ )\ \wedge\ (\ (\ Q \Rightarrow\ \exists y \in B\ P\ )\ \vee\ Q\ )\ ).$$

なお、同じ強さの演算記号が並ぶときは括弧が必要である。$P \wedge Q \vee R$ は曖昧である（人によって解釈が違う)。必ず $(P \wedge Q) \vee R$ または $P \wedge (Q \vee R)$ と書かないといけない。同様に $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ は $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ か $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ のいずれかかを明確にする必要がある。

練習　次の論理式には曖昧さがあるか。曖昧さがない場合は括弧をつけよ。曖昧な場合には、可能な括弧の付け方をすべて求めよ。

1. $P\ \wedge\ Q\ \wedge\ R,$
2. $P\ \wedge\ Q\ \Rightarrow\ R\ \vee\ S\ \Rightarrow\ T.$
3. $P\ \wedge\ \exists x \in A\ Q(x)\ \Rightarrow\ \neg R\ \vee\ Q.$

2.4 主要な集合

- $\mathbf{N}$: 自然数 $1, 2, 3, \cdots$ の集合。
- $\mathbf{Z}$:整数の集合。
- $\mathbf{Q}$: 有理数の集合。
- $\mathbf{R}$:実数の集合。
- $\mathbf{C}$:複素数の集合。
- X, Y が集合のとき、$X \times Y := \left\{ (x,y) \,\middle|\, x \in X, y \in Y \right\}$ 集合 X の要素 x と集合 Y の要素の順序対 (x, y) 全体の集合。
- $X^2 = X \times X$, $X^n := \overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^{n}$.

2.5 論理式に直す練習

数学のテキストに出てくる変数が断りなしに出現する場合は、文脈から動く範囲が暗黙の内に決まっている。また、命題の中に自由変数 x が現れるときは、特に断らない限り「考えている範囲に属すどの x についてもそれが成り立つ」という主張だと解釈する。

例. 「$a \neq 0, b^2 - 4ac \geq 0$ ならば $ax^2 + bx + c = 0$ は解を持つ」これは

$$\begin{aligned} &\forall a, b, c \in \mathbf{R} \\ &a \neq 0 \ \wedge \ b^2 - 4ac \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists x \in \mathbf{R} \ \ ax^2 + bx + c = 0. \end{aligned}$$

を意味する。なお、$\forall a, b, c \in \mathbf{R}$ は $\forall a \in \mathbf{R}\, \forall b \in \mathbf{R}\, \forall c \in \mathbf{R}$ の省略形。

練習問題. 次の主張を疑似論理式で表せ。

1. $n(n+1)$ は偶数.
2. 2 と 3 で割れる数は 6 でも割れる.
3. $xy < 0$ ならば $x < 0$ または $y < 0$.
4. 2等辺三角形の底角は等しい.
5. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
6. 判別式が 0 の 2 次方程式は異なる 2 根を持つ.
7. 判別式が負の 2 次方程式は実根を持たない.
8. (a, b) を通り、傾きが m の直線の方程式は $y = m(x-a) + b$ である.
9. 整式 $f(x)$ が $f(a) = 0$ を満たすとき f は $x - a$ で割り切れる.
10. 2つの円が 3 つの点を共有すれば一致する.

2.6 宿題

1. 「$\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$」 ならば $x = 0$ を証明せよ。
2. 「$\lim_n a_n = c, \lim_n b_n = d$ ならば $\lim_n (a_n + b_n) = c + d$ 」を証明せよ。

2.7 来週の小テスト

宿題の 1 番.