3　第３回：証明の書き方

きょうの予定

- 確認テスト
- 証明の書き方の注意
- ε-δ 証明の練習

3.1　演算子の強さの訂正

- $\neg$, $\forall x \in A$, $\exists x \in A$
- $\wedge$, $\vee$
- $\Rightarrow$

演算記号の引数の数を、その演算子の**アリティ**という。

- $\forall x \in A$, $\exists x \in A$, $\neg$ はマイナス記号 $-$ と同じように、アリティが 1 の演算子,
- $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ はアリティが 2 の演算子である。

アリティが 1 の演算子は同じ強さを与えたが、それが続いているときは、右から括弧をつける。

$$\neg\forall x \in A \neg\forall y \in BP$$

は、

$$\neg(\forall x \in A(\neg(\forall y \in BP)))$$

を略したもの。(他に括弧のつけようがない)。

従って、前回の例

$$\forall x \in A\, \neg P \ \wedge\ Q \ \Rightarrow\ \exists y \in B\ P \ \vee\ Q$$

は

$$((\forall x \in A(\neg P)) \wedge Q) \Rightarrow ((\exists y \in B\ P) \vee Q)$$

を意味することになる。

また、$P \ \wedge\ \exists x \in A\, Q(x) \ \Rightarrow\ \neg R \ \vee\ Q$ は

$$(P \ \wedge\ (\exists x \in A\, Q(x))) \ \Rightarrow\ ((\neg R) \ \vee\ Q)$$

となる。

3.2 前回練習問題の解答

次の主張を疑似論理式で表せ。解答はいろいろ有り得る。

(1) $n(n+1)$ は偶数.

$$\exists m \in \mathbf{Z}\ [\ n(n+1) = 2m\ ].$$

(2) 2 と 3 で割れる数は 6 でも割れる.

$$\forall n \in \mathbf{Z}\ [\ 2|n\ \wedge\ 3|n\ \Rightarrow\ 6|n\ ].$$

ただし、$n|m$ は 「n が m を割り切る」という２項関係をあらわすが、これ自身

$$\exists x \in \mathbf{Z}\ [\ n \times x = m\ ]$$

という論理式で定義される。

(3) $xy < 0$ ならば $x < 0$ または $y < 0$.

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R}\ [\ xy < 0\ \Rightarrow\ x < 0 \vee y < 0\ ].$$

(4) ２等辺三角形の底角は等しい.

$\forall A\ \forall B\ \forall C \in \mathbf{R}^2$ [「A, B, C が３角形を成す」$\wedge$ $AB = AC\ \Rightarrow\ \angle ABC = \angle ACB$].

(5) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

$$\forall x,\ \forall y \in \mathbf{R}\ [\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.]$$

(6) 判別式が０の２次方程式は異なる２根を持つ.

$$\forall a,\ \forall b,\ \forall c \in \mathbf{C}\ [\ a \neq 0\ \wedge\ b^2 - 4ac \neq 0\ \Rightarrow$$
$$\exists \alpha,\ \beta \in \mathbf{C}\ [\ \alpha \neq \beta\ \wedge\ a\alpha^2 + b\alpha + c = 0\ \wedge\ a\beta^2 + b\beta + c = 0\ ]\ ]$$

(7) 判別式が負の 2 次方程式は実根を持たない.

$$\forall a,\ \forall b, \forall c \in \mathbf{R}$$
$$\Big[\ a \neq 0\ \wedge\ b^2 - 4ac < 0\ \Rightarrow\ \neg\exists x \in \mathbf{R}\ [\ ax^2 + bx + c = 0\ ]\ \Big].$$

(8) (a, b) を通り、傾きが m の直線の方程式は $y = m(x - a) + b$ である.

$\forall a,\ \forall b,\ \forall m,\ \forall x,\ \forall y \in \mathbf{R}$

[(a, b) と (x, y) を通る直線の傾きが $m \Leftrightarrow y = m(x - a) + b$] .

(9) 整式 $f(x)$ が $f(a) = 0$ を満たすとき f は $x - a$ で割り切れる.

$\forall f(x) \in \{$ 整式 $\}\ \forall a \in \mathbf{R}\ [\ f(a) = 0\ \Rightarrow\ \exists g(x) \in \{$ 整式 $\}\ f(x) = (x - a)g(x)\ ]$

(10) 2 つの円が 3 つの点を共有すれば一致する.

$\forall C_1,\ \forall C_2 \in \{$ 円 $\}$ [

$\exists P, \exists Q, \exists R \in \mathbf{R}^2\ [\ P \neq Q\ \wedge\ Q \neq R\ \wedge\ P, Q, R \in C_1\ \wedge\ P, Q, R \in C_2\ ]$

$\Rightarrow\ C_1 = C_2$] .

3.3 宿題の解答

「$\forall\varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$」ならば $x = 0$ を証明せよ。

証明

$$\forall\varepsilon > 0\ [\ |x| < \varepsilon\ ] \tag{1}$$

とする。背理法で示すために結論の否定

$$x \neq 0 \tag{2}$$

を仮定する。

すると $|x|/2 > 0$ なので、(1) を $\varepsilon = |x|/2$ に適用することができて、

$$|x| < |x|/2$$

を得る。$|x| \neq 0$ より $1 < 1/2$ となり矛盾を得る。

この矛盾は (2) を仮定したことから生じたので (2) は正しくないことがわかる。よって $x = 0$ でなければならない。

以上により (1) ならば $x = 0$ となることが示された。 **証明終**

「$\lim_n a_n = c, \lim_n b_n = d$ ならば $\lim_n (a_n + b_n) = c + d$ 」を証明せよ。

証明.

$$\lim_n a_n = c, \quad \lim_n b_n = d \text{ とする。} \tag{$*$}$$

定義より、

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n > N\ [|a_n - c| < \varepsilon\ ] \tag{3}$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n > N\ [|b_n - d| < \varepsilon\ ] \tag{4}$$

である。

正の実数 ε を勝手にとる。 (0)

(3), (4) の ε に $\varepsilon/2$ を代入すると

$$\exists N \in \mathbf{N} \forall n > N\ [|a_n - c| < \varepsilon/2\ ] \tag{3$'$}$$

$$\exists N \in \mathbf{N} \forall n > N\ [|b_n - d| < \varepsilon/2\ ] \tag{4$'$}$$

となる。

(3$'$) より

$$\forall n > N_1\ [|a_n - c| < \varepsilon/2\ ] \tag{3$''$}$$

を満たす自然数 N_1 を選ぶことができる。同様に $(4')$ より

$$\forall n > N_2 \ [|b_n - d| < \varepsilon/2\ ] \tag{4''}$$

を満たす自然数 N_2 を選ぶことができる。

$N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ とおく。

$n > N_3$ とする。 (5)

このとき、$n > N_1$ なので、$(3'')$ より

$$|a_n - c| < \varepsilon/2.$$

また、$n > N_2$ でもあるので $(4'')$ より

$$|b_n - d| < \varepsilon/2.$$

この 2 式を使うと

$$|a_n + b_n - c - d| \leq |a_n - c| + |b_n - d| < \varepsilon.$$

すなわち、

$$|(a_n + b_n) - (c + d)| < \varepsilon \tag{6}$$

がわかった。

ここで、n についての制約は (5) しかないので

$$\forall n > N_3 \ [\ |(a_n + b_n) - (c + d)| < \varepsilon\ ] \tag{6'}$$

となる。N_3 は自然数なので、

$$\exists N \in \mathbf{N}\ \forall n > N \ [\ |(a_n + b_n) - (c + d)| < \varepsilon\ ] \tag{6'}$$

この論理式の中の自由変数 ε についての制約は (0) だけであった。従って

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n > N \ [\ |(a_n + b_n) - (c + d)| < \varepsilon\ ]$$

すなわち、

$$\lim_n (a_n + b_n) = c + d \tag{**}$$

が示された。

従って示すべき「$(*)$ ならば $(**)$ 」の証明が得られた。 **証明終**

3.4 証明の書き方

数学の証明の書き方にはポイントがいくつかある。実はポイントは

> 「注意深く聞いてくれる相手に、何かを説明して納得してもらおう」とする時の態度で書く

に最終的には尽きるが、最初なのでもう少し具体的に説明しよう。

- 証明は文章の一種であるという認識が不可欠である。
- 最初は冗長に感じても、できるだけ詳しく書く習慣が必要である。（ある程度証明の表現法に習熟して初めて、何を省略してよいかの判断が的確にできようになる。）
- 数学の証明には独特の小数のパターンがあり、それを知る必要がある。
- しかし、そのパターンが入れ子になって錯綜しがちなので、その入れ子構造が明確になるようなキーワードが不可欠である。

証明の構造を明記するキーワード の種類

(**序**) 証明の冒頭に、証明の方針を明記する。

(**接続文**) 証明の構造を明記する。（場合分けのときに重要）

(**結語**) 証明の終わりに、証明が終わった確認を明記する。

(**文の身分**) すべての文は、仮定なのか、結論なのかを明記する。

(**記号の素性**) 証明中に新しい記号を使い始めるときには、それが何者かを明記する。

3.5 証明の書き方：各論

3.5.1 $P \Rightarrow Q$ の直接法

これは P を仮定して Q を示す。書き方は

> **(序)** 直接法で示す。前提 P を仮定しよう。
>
> **(結語)** よって Q が成り立つ。以上により主張が示された。

直接法の場合は、本では「直接法で示す」・「以上により主張が示された。」などの文は省かれることが多いが、自分で書くときは省かないように。この資料では証明の終わりは ▮で表示する。

「以上により主張が示された」を**Q.E.D.** と書く習慣もある。これは、ラテン語 “Quod Erat Demonstrandum(As was to be proved)” の略記。

例 n, m が奇数ならば $n+m$ は偶数である。

証明 直接法で示す。n, m を奇数とする。. . . . . **(序)**

奇数の定義より、**自然数** n_1, m_1 **を用いて** $n = 2n_1 + 1$, $m = 2m_1 + 1$ **とあらわすことができる**。. . . . . **(記号の素性, 文の身分)**

計算により

$$n + m = 2(n_1 + m_1 + 1)$$

となる。すなわち、$n+m$ は偶数であることがわかる。. . . . . **(文の身分)**

以上により、主張が示された。. . . . . **(結語)**

3.5.2 $P \Rightarrow Q$ の間接法

これは $\neg Q$ を仮定して $\neg P$ を導く。

(序) 対偶を証明しよう。$\neg Q$ を仮定する。

(結語) よって $\neg P$ となる。以上の議論の対偶をとれば $P \Rightarrow Q$ が示されたことになる。

例 実数 x, y の積が 0 でなければ、x, y のいずれも 0 ではない。
証明 対偶を証明しよう。x, y は共に 0 であるとする。このとき x, y の積は 0 となる. 以上の対偶をとれば、主張が示されたことになる。

3.5.3 $P \Rightarrow Q$ の背理法

これは P と $\neg Q$ を仮定して矛盾を導く。

(序) 背理法により証明しよう。P を仮定し、さらに Q ではないと仮定しよう。

(結語) これは矛盾である。従って P ならば Q でなければならない。

3.5.4 場合分けによる証明

$P \vee Q \Rightarrow R$ を示すのに、$P \Rightarrow R$ と　$Q \Rightarrow R$ をそれぞれ示す。

(序) 場合分けにより証明しよう。おこりうるのは

(場合 A) P

(場合 B) Q

のいずれかである。

(接続文) (場合 A) P とする。... よって R が成り立つ。(場合 A 終わり)

(接続文) (場合 B) Q とする。... よって R が成り立つ。(場合 B 終わり)

(結語) 以上により、(A),(B) いずれの場合にも R が成り立つので、主張が証明された。

例　$n(n+1)$ は偶数である。
証明　場合分けにより示す。

(場合 A) n が偶数

(場合 B) n が奇数

のいずれかである。

(A) の場合。n が偶数のとき $n(n+1)$ が偶数なことは明らか。(B) の場合。n が奇数とする。このとき $n+1$ は偶数なので $n(n+1)$ も偶数。

よって、いずれの場合にも $n(n+1)$ は偶数となるので、主張は証明された。∎

3.6 将棋で名人の強さを利用する方法

1. 将棋を 2 つ平行して差す（それぞれの勝負を G, H とする）、ただし、
   - 勝負 G の先手は X 後手が自分
   - 勝負 H の先手は自分で、後手は名人とする。
2. G で X が A という手を指したとき、自分はそれをゲーム H で差す。
3. 名人が A に対して B という手を指したら、それをまねして G で B を差す。

こうすることにより、X は実は名人と将棋を指していることになる。

論理式 $(\forall x\ \exists y\ [P]) \Rightarrow (\forall x\ \exists y\ [Q])$ の証明はこれと同じ考えでおこなう。前提 $(\forall x\ \exists y\ [P])$ を仮定するのが、名人の知識を利用できると想定することである。