4 第4回：数列の極限 (3)

きょうの予定

- 確認テスト
- $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = c^2$ の証明
- $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_1^n a_i}{n} = c$ の証明

4.1 命題の否定法

四角の中は特に間違えやすい．

(4.1.1) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$.

(4.1.2) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$.

(4.1.3) $\boxed{P \Rightarrow Q \equiv P \wedge \neg Q}$.

(4.1.4) $\neg(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.

(4.1.5) $\neg\forall x \in A[P] \equiv \exists x \in A[\neg P]$.

(4.1.6) $\neg\exists x \in A[Q] \equiv \forall x \in A[\neg Q]$.

(4.1.7) $\boxed{\neg\forall x \in A[P \Rightarrow Q] \equiv \exists x \in A[P \wedge \neg Q]}$.

記号列 $\boxed{P \equiv Q}$ は論理式 P が論理式 Q に**論理同値**であることを意味する．これは自身は論理式ではなく、「$P \Leftrightarrow Q$ という論理式が正しい」の略記である．証明においては P と Q とは同じ役割を果たす、すなわち、P を主張することと Q を主張することは同じこととなる．

4.2 例題

(4.2.1) $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ を否定せよ．すなわち、論理式

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n > N[|a_n - c| < \epsilon]$$

の否定論理式を求めよ.

$$\begin{aligned} & \neg\forall\epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbf{N} \;\; \forall n > N \;\; [|a_n - c| < \epsilon] \\ \equiv \quad & \exists\epsilon > 0 \neg\exists N \in \mathbf{N} \;\; \forall n > N \;\; [|a_n - c| < \epsilon] \\ \equiv \quad & \exists\epsilon > 0 \;\; \forall N \in \mathbf{N} \neg\forall n > N \;\; [|a_n - c| < \epsilon] \\ \equiv \quad & \exists\epsilon > 0 \;\; \forall N \in \mathbf{N} \;\; \exists n > N \neg[|a_n - c| < \epsilon] \\ \equiv \quad & \exists\epsilon > 0 \;\; \forall N \in \mathbf{N} \;\; \exists n > N \;\; [|a_n - c| \geq \epsilon]. \end{aligned}$$

4.3 命題の否定の練習

(4.3.1) §3.2 の論理式の否定を作れ.

4.4 $\lim a_n = c$ ならば $\lim a_n^2 = c^2$ の証明の仕方

$$\forall\varepsilon\exists N\forall m \geq N[|a_m - c| < \varepsilon] \Rightarrow \forall\varepsilon\exists N\forall m \geq N[|a_m^2 - c^2| < \varepsilon]$$

を示す.

証明

$$\forall\varepsilon_1\exists N_1\forall m_1 \geq N_1[|a_{m_1} - c| < \varepsilon_1] \tag{1}$$

と仮定する。ε を正の実数とする。

$$\forall m > N \; [\; |a_m^2 - c^2| < \varepsilon \;] \tag{2}$$

を満たす N があればよい。

(以下は発見的ステップ.)

あとで適切に選ぶことになる $\varepsilon_1 > 0$ を今はとりあえず、勝手な正の実数とする. これに対して、仮定 (1)[名人の知恵] を用いて

$$\forall m > N_1 \; [\; |a_m - c| < \varepsilon_1 \;] \tag{3}$$

となる自然数 N_1 を選ぶことができる.

目標の論理式 $|a_m^2 - c^2| < \varepsilon$ をめざして、$|a_m^2 - c^2|$ を変形してみる.

$$|a_m^2 - c^2| = |a_m - c||a_m + c| \leq |a_m - c|(|a_m| + |c|).$$

従って、$m > N_1$ ならば、

$$|a_m^2 - c^2| \leq \varepsilon_1(|a_m| + |c|).$$

(ここで $a_m = c = 0$ の場合があるので、等号は省けない).

ここで $|a_m| + |c|$ が m と共に動くので困る. しかし、

> $\boxed{\text{虫のいい}\textbf{空想}}$: $|a_m| < K$ がすべての m について成り立つような実数 K がある．

が正しいとすると、$m > N_1$ ならば

$$|a_m^2 - c^2| \le \varepsilon_1(|a_m| + |c|) < \varepsilon_1(K + |c|)$$

となる．従って、 もしも $\varepsilon_1(K + |c|) = \varepsilon$ と ε_1 を選んでおいたのだったら

$$m > N_1 \text{ならば } |a_m^2 - c^2| < \varepsilon$$

となり、欲しかった N として N_1 が選べることが示されたことになる．
（**空想を仮定した上で、発見的ステップを終わる**）

そこで、$\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{K + |c|}$ として仮定 (1) を用いると、$m > N$ ならば

$$|a_m^2 - c^2| < \varepsilon_1(K + |c|) = \varepsilon$$

となる N が存在することがわかる．ε は勝手な正数だったので、

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \forall m > N[|a_m^2 - c^2| < \varepsilon]$$

すなわち $\lim a_n^2 = c^2$ が示された．

あとは空想の部分が正しいことを示せばよい．仮定 (1) を $\varepsilon_1 = 1$ の場合に適用すると、$n > N_1$ ならば $|a_n - c| < 1$ となる自然数 N_1 がある．そうすると、$n > N_1$ ならば

$$|a_n| \le |a_n - c| + |c| \le 1 + |c|.$$

残りの項 $|a_1|, \cdots, |a_{N+1}|$ は有限個だから、その最大値を M とすると

$$n \le N_1 \text{ならば } |a_n| \ge M.$$

$K = 1 + \max\{M, 1 + |c|\}$ とおく．自然数 n について、

$$n > N_1 \text{ならば } |a_n| \le |c| + 1 < K.$$

$$n \le N_1 \text{ならば } |a_n| \le M < K.$$

よって、どの自然数 n についても $|a_n| < K$ となる．これにより空想の証明を終わる．これにより、証明が完了した． ∎

資料としての説明を省いた証明　以上は、講義資料としての説明がたくさん含まれているので、それを省略すると以下のようになる．

証明

$$\forall\varepsilon_1\exists N_1\forall m_1\geq N_1[|a_{m_1}-c|<\varepsilon_1] \tag{1}$$

と仮定する。ε を正の実数とする。

ε_1 を勝手な正の実数とする．仮定 (1) を用いて

$$\forall m>N_1\ [\ |a_m-c|<\varepsilon_1\ ] \tag{3}$$

となる自然数 N_1 を選ぶことができる．

$$|a_m^2-c^2|=|a_m-c||a_m+c|.$$

より、$m>N_1$ ならば、

$$|a_m^2-c^2|\leq\varepsilon_1|a_m+c|.$$

補題　$|a_m|<K$ がすべての m について成り立つような実数 K がある．

補題は最後に示す．補題により、$m>N_1$ ならば

$$|a_m^2-c^2|\leq\varepsilon_1(|a_m|+|c|)<\varepsilon_1(K+|c|)$$

となる．

正数 ε_1 の選び方には制限はなかったので、$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{K+|c|}$ としてよい．

そうすると $m>N_1$ ならば

$$|a_m^2-c^2|\leq\varepsilon_1(K+|c|)=\varepsilon.$$

従って、

$$\exists N\forall m>N[|a_m^2-c^2|<\varepsilon].$$

ε は勝手な正数だったので、

$$\forall\varepsilon>0\exists N\forall m>N[|a_m^2-c^2|<\varepsilon]$$

すなわち $\lim a_n^2=c^2$ が示された．

あとは補題を示せばよい．仮定 (1) を $\varepsilon_1=1$ の場合に適用して、$n>N_1$ ならば $|a_n-c|<1$ となる自然数 N_1 を選ぶ。このとき、$n>N_1$ ならば

$$|a_n|\leq|a_n-c|+|c|\leq 1+|c|.$$

$K=1+\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N_1}|,1+|c|\}$ とおく．自然数 n について、

$$n>N_1\text{ならば } |a_n|\leq|c|+1<K.$$

$$n\leq N_1\text{ならば } |a_n|\leq M<K.$$

よって、どの自然数 n についても $|a_n|<K$ となる．これにより補題の証明を終わる．

以上により、証明が完了した．　∎

発見的推論を消去した証明　発見的プロセスを完全に隠蔽して次のように書いても論理的には間違いではないが、数学的には説明が不完全であると私は思う.
証明
$$\forall\varepsilon_1\exists N_1\forall m_1\geq N_1[|a_{m_1}-c|<\varepsilon_1] \tag{1}$$
と仮定する。
補題　$|a_m|<K$ がすべての m について成り立つような実数 K がある.
補題の証明　仮定 (1) を $\varepsilon_1=1$ の場合に適用すると、ある自然数 N_1 があって $n>N_1$ ならば $|a_n-c|<1$ となる. そうすると、$n>N_1$ ならば
$$|a_n|\leq|a_n-c|+|c|\leq 1+|c|.$$
$K=1+\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N_1}|,1+|c|\}$ とおく. 自然数 n について、
$$n>N_1\text{ならば } |a_n|\leq|c|+1<K.$$
$$n\leq N_1\text{ならば } |a_n|\leq M<K.$$
よって、どの自然数 n についても $|a_n|<K$ となる. **補題の証明終**

$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{K+|c|}$ について (1) を適用すると
$$\forall m>N_1\ [\ |a_m-c|<\varepsilon_1\ ] \tag{3}$$
となる自然数 N_1 を選ぶことができる.
　$m>N_1$ ならば、
$$|a_m^2-c^2|=|a_m-c||a_m+c|\leq\varepsilon_1(K+|c|)=\varepsilon.$$
従って、
$$\exists N\forall m>N[|a_m^2-c^2|<\varepsilon].$$
示された. ε は勝手な正数だったので、
$$\forall\varepsilon>0\exists N\forall m>N[|a_m^2-c^2|<\varepsilon]$$
すなわち $\lim a_n^2=c^2$ が示された. 以上により $\lim a_n=c$ ならば $\lim a_n^2=c^2$ であることが証明された. ∎

4.5　宿題

　$\lim a_n=c$ ならば $\lim f(a_n)=f(c)$ 型の証明では、
$$|f(a_n)-f(c)|\leq|a_n-c|F(a_n,c)$$
と変形し、$\left\{\ F(a_n,c)\ \middle|\ n\in\mathbf{N}\ \right\}$ が上に有界、すなわち、
$$\exists K\forall n[F(a_n,c)<K]$$
を示すことが核心である.
　次を証明せよ.

(4.5.1) $\lim a_n = c$ ならば $\lim a_n^3 = c^3$.
(4.5.2) $\lim a_n = c$ かつ $\forall n[a_n \neq 0]$, $c \neq 0$ ならば $\exists L > 0 \forall n[|a_n| > L]$.
(4.5.3) $\lim a_n = c$ かつ $\forall n[a_n \neq 0]$, $c \neq 0$ ならば $\lim \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{c}$.
(4.5.4) $\lim a_n = c, \lim b_n = d$ ならば $\lim a_n b_n = cd$.

4.6 $\lim a_n = c$ ならば $\lim \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = c$

この証明には、ε_1 だけでなく、N の自由度も利用しなければならない.

方針

$$\forall \varepsilon_1 \exists N_1 \forall m \geq N d_1[|a_m - c| < \varepsilon_1]$$

とする.

$\varepsilon_1 > 0$ とする。$\forall m \geq N d_1[|a_m - c| < \varepsilon_1]$ となる N_1 をとる。
また、K を $\forall n[|a_n| + |c| < K]$ を満たす正数とする（補題より）.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} - c \right| \\
= & \left| \frac{(a_1 - c) + (a_2 - c) + \cdots + (a_m - c)}{m} \right| \\
\leq & \frac{|a_1 - c| + |a_2 - c| + \cdots + |a_{N_1} - c|}{m} + \frac{|a_{N_1+1} - c| + \cdots + |a_m - c|}{m} \\
\leq & \frac{N_1 K}{m} + \frac{(m - N_1)\varepsilon_1}{m} \\
\leq & \frac{N_1 K}{m} + \varepsilon_1.
\end{aligned}$$

第 2 項については ε_1 の自由度を利用し、第 1 項については N の自由度を利用する.

$\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ としてよい. これで N_1 が確定する. そこで、$m > N$ ならば、$\dfrac{N_1 K}{m} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となるように N をとる. 実際に N を実数 $\dfrac{N_1 K}{\varepsilon}$ の整数部分に 1 を加えたもの $N := \left[\dfrac{N_1 K}{\varepsilon}\right] + 1$ をとればよい.

練習 以上の骨子に基づき証明を完成させよ.