5 第 5 回：関数の連続性

きょうの予定

- $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_1^n a_i}{n} = c$ の証明の続き
- 宿題の解答
- 関数の連続性

5.1 $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_1^n a_i}{n} = c$ の証明：完成版

(以下で四角で囲んだ変数は切り札で、後で自由に調整する可能性を残している)

$$\forall \varepsilon_1 \exists N_1 \forall m \geq N_1 [|a_m - c| < \varepsilon_1] \tag{1}$$

とする．$\varepsilon > 0$ とする。目標は $\forall m \geq N \left[\left| \dfrac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - c \right| < \varepsilon \right]$ となる N をみつけることにある。そこで

$$\boxed{N} \in \mathbf{N} \tag{2}$$

とする。さらに

$$m \geq \boxed{N} \tag{3}$$

とする。

さて、$\boxed{\varepsilon_1} > 0$ に対して、仮定 (1) より $\forall m \geq N_1 [|a_m - c| < \boxed{\varepsilon_1}]$ となる $N_1 \in \mathbf{N}$ が有る。また K を $\forall n [|a_n| < K]$ を満たす正数とする（補題より）．これを利用して、目標の不等式を変形しておこう。

$$m \geq N_1 \tag{4}$$

とする。

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} - c \right| \\ = & \left| \frac{(a_1 - c) + (a_2 - c) + \cdots + (a_m - c)}{m} \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{|a_1-c|+|a_2-c|+\cdots+|a_{N_1}-c|}{m}+\frac{|a_{N_1+1}-c|+\cdots+|a_m-c|}{m}\\
&\le \frac{\overbrace{(K+|c|)+(K+|c|)+\cdots+(K+|c|)}^{N_1}}{m}+\frac{\overbrace{\boxed{\varepsilon_1}+\boxed{\varepsilon_1}+\cdots+\boxed{\varepsilon_1}}^{m-N_1}}{m}\\
&\le \frac{N_1(K+|c|)}{m}+\frac{(m-N_1)\boxed{\varepsilon_1}}{m}\\
&\le \frac{N_1(K+|c|)}{m}+\boxed{\varepsilon_1}.\\
&\le \frac{N_1(K+|c|)}{\boxed{N}}+\boxed{\varepsilon_1}.
\end{aligned}
$$

ここで N,ε_1 に残っている自由度を利用する。$\boxed{\varepsilon_1}<\varepsilon/2$ かつ

$$
\frac{N_1(K+|c|)}{\boxed{N}}<\varepsilon/2 \tag{5}
$$

となるようにすればよい。そこで $\varepsilon_1=\varepsilon/2$ であったとする。また N は (5) と同時に (4) が (3) から導かれるように $N\ge N_1$ となるように選べばよい。例えば、$N:=\max\left\{N_1,\left[\frac{N_1(K+|c|)}{\varepsilon}\right]+1\right\}$ とおけば両方の条件が満たされる。

以上のように N を選んでおくと (3) のとき

$$
\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}-c\right|<\varepsilon
$$

となる。よって

$$
\exists N\forall m>N\left[\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}-c\right|<\varepsilon\right]
$$

ε は任意の正数だったので

$$
\forall\varepsilon>0\exists N\forall m>N\left[\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}-c\right|<\varepsilon\right]
$$

が示された。

5.2 関数の連続性

これまでにいろいろな関数 ($f(x)=2x,x^2,x^3,1/x$) について「$\lim_n a_n=c$ ならば $\lim_n f(a_n)=f(c)$」という命題を証明してきたが、逆にこの論理式を f についての条件と見ることができる。

5.2.1 連続性の定義 1

実数 c のまわりで定義された実数値関数 f が c **で連続**であるとは任意の数列 (a_n) に対し $\lim_n a_n = c$ ならば $\lim_n f(a_n) = f(c)$ となることをいう。

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}}[\lim_n a_n = c \Rightarrow \lim_n f(a_n) = f(c)].$$

注意 新しい概念が定義されたときには、例と同時に反例を考えるのが不可欠である。（もしも反例がなければその定義としては**空振り**であったことになる。しかし反例がないことを証明することで重要な定理となることもある。）連続の例としては、$f(x) = 2x, x^2, x^3, 1/x$ などがある。

5.2.2 連続でない例

$$\exists (a_n)_{n\in\mathbf{N}}[\lim_n a_n = c \wedge \neg[\lim_n f(a_n) = f(c)]].$$

$\lim_n f(a_n) = f(c)$ とならない状況としては 2 通りある。一つは、

- $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ がそもそもどの数にも収束しない、

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

  $a_n = 1/n.$

- $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ はある数 d に収束するが $d \neq f(c)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

  $a_n = 1/n.$

5.2.3 練習問題

関数 f が c で連続ならば、f^2 も c^2 で連続である。

5.3 連続性の定義 2

上は「全ての数列について」というタイヘンな条件だが、これは、次のもう論理的に簡単な条件と同値なことがわかる。

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [|x-c| < \delta] \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

5.3.1 宿題

定義２の意味で連続ならば定義１の意味で連続なことを証明せよ。

5.4 命題の否定の練習の解答

(1) $n(n+1)$ は偶数.

$$\exists m \in \mathbf{Z} \, [\, n(n+1) = 2m \,].$$

の否定は

$$\forall m \in \mathbf{Z} \, [\, n(n+1) \neq 2m \,].$$

(2) 2 と 3 で割れる数は 6 でも割れる.

$$\forall n \in \mathbf{Z} \, [\, 2|n \ \wedge \ 3|n \ \Rightarrow \ 6|n \,].$$

の否定は、

$$\exists n \in \mathbf{Z} \, [\, 2|n \ \wedge \ 3|n \ \wedge \ \neg(6|n) \,].$$

(3) $xy < 0$ ならば $x < 0$ または $y < 0$.

$$\forall x \in \mathbf{R} \, \forall y \in \mathbf{R} \ [\, xy < 0 \ \Rightarrow \ x < 0 \vee y < 0 \,].$$

の否定は

$$\exists x \in \mathbf{R} \, \exists y \in \mathbf{R} \ [\, xy < 0 \ \wedge \ \neg(x < 0) \wedge \neg(y < 0) \,].$$

(4) ２等辺三角形の底角は等しい.

$$\forall A \, \forall B \, \forall C \in \mathbf{R}^2 \ [\text{「}A, B, C \text{ が３角形を成す」} \wedge \ AB = AC \ \Rightarrow \ \angle ABC = \angle ACB \,].$$

の否定は

$$\exists A \, \exists B \, \exists C \in \mathbf{R}^2 \ [\text{「}A, B, C \text{ が３角形を成す」} \wedge \ AB = AC \ \wedge \ \angle ABC \neq \angle ACB \,].$$

(5) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

$$\forall x, \ \forall y \in \mathbf{R} \ [\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.]$$

の否定は

$$\exists x, \ \exists y \in \mathbf{R} \ [\sin(x+y) \neq \sin x \cos y + \cos x \sin y.]$$

(6) 判別式が０の２次方程式は異なる２根を持つ.

$$\begin{aligned} &\forall a, \ \forall b, \ \forall c \in \mathbf{C} \, [\, a \neq 0 \ \wedge \ b^2 - 4ac \neq 0 \ \Rightarrow \\ &\qquad \exists \alpha, \ \beta \in \mathbf{C} \, [\, \alpha \neq \beta \ \wedge \ a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \ \wedge \ a\beta^2 + b\beta + c = 0 \,]\,] \end{aligned}$$

の否定は

$$\begin{aligned} &\exists a, \ \exists b, \ \exists c \in \mathbf{C} \, [\, a \neq 0 \ \wedge \ b^2 - 4ac \neq 0 \ \wedge \\ &\qquad \forall \alpha, \ \beta \in \mathbf{C} \, [\, \alpha = \beta \ \vee \ a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0 \ \vee \ a\beta^2 + b\beta + c \neq 0 \,]\,] \end{aligned}$$

(7) 判別式が負の 2 次方程式は実根を持たない.

$$\forall a,\ \forall b, \forall c \in \mathbf{R}$$
$$\left[\ a \neq 0\ \wedge\ b^2 - 4ac < 0\ \Rightarrow\ \neg\exists x \in \mathbf{R}\ [\ ax^2 + bx + c = 0\ ]\ \right].$$

の否定は

$$\exists a,\ \exists b, \exists c \in \mathbf{R}$$
$$\left[\ a \neq 0\ \wedge\ b^2 - 4ac < 0\ \wedge\ \exists x \in \mathbf{R}\ [\ ax^2 + bx + c = 0\ ]\ \right].$$

(8) (a, b) を通り、傾きが m の直線の方程式は $y = m(x - a) + b$ である.

$$\forall a,\ \forall b,\ \forall m,\ \forall x,\ \forall y \in \mathbf{R}$$
$$[\ (a, b) \text{ と } (x, y) \text{ を通る直線の傾きが } m \Leftrightarrow y = m(x - a) + b\ ].$$

の否定は

$$\exists a,\ \exists b,\ \exists m,\ \exists x,\ \exists y \in \mathbf{R}$$
$$[\ (a, b) \text{ と } (x, y) \text{ を通る直線の傾きが } m\ \wedge\ y \neq m(x - a) + b$$
$$(a, b) \text{ と } (x, y) \text{ を通る直線の傾きが } m \text{ でない} \wedge\ y = m(x - a) + b\ ].$$

(9) 整式 $f(x)$ が $f(a) = 0$ を満たすとき f は $x - a$ で割り切れる.

$$\forall f(x) \in \{\ \text{整式}\ \}\ \forall a \in \mathbf{R}\ [\ f(a) = 0\ \Rightarrow\ \exists g(x) \in \{\ \text{整式}\ \}\ f(x) = (x - a)g(x)\ ]$$

の否定は

$$\exists f(x) \in \{\ \text{整式}\ \}\ \exists a \in \mathbf{R}\ [\ f(a) = 0\ \wedge\ \forall g(x) \in \{\ \text{整式}\ \}\ f(x) \neq (x - a)g(x)\ ]$$

(10) 2 つの円が 3 つの点を共有すれば一致する.

$$\forall C_1,\ \forall C_2 \in \{\ \text{円}\ \}\ [$$
$$\exists P, \exists Q, \exists R \in \mathbf{R}^2\ [\ P \neq Q\ \wedge\ Q \neq R\ \wedge\ P, Q, R \in C_1\ \wedge\ P, Q, R \in C_2\ ]$$
$$\Rightarrow\ C_1 = C_2\ ].$$

の否定は

$$\exists C_1,\ \exists C_2 \in \{\ \text{円}\ \}\ [$$
$$\forall P, \forall Q, \forall R \in \mathbf{R}^2\ [\ P \neq Q\ \wedge\ Q \neq R\ \wedge\ P, Q, R \in C_1\ \wedge\ P, Q, R \in C_2\ ]$$
$$\wedge\ C_1 \neq C_2\ ].$$

5.5 宿題の略解

次を証明せよ.

$\boxed{1}$ $\lim a_n = c$ ならば $\lim a_n^3 = c^3$.
証明. $\lim a_n = c$ とする。$\varepsilon_1 > 0$ とする。

$$|a_n^3 - c^3| = |a_n - c||a_n^2 + a_n c + c^2| \leq |a_n - c|(|a_n|^2 + |c||a_n| + c^2).$$

そこで、 $|a_n|$ の上限を K とすると

$$|a_n^3 - c^3| \leq |a_n - c|(K^2 + |c|K + c^2). \tag{1}$$

そこで、$\lim a_n = c$ を定義する論理式

$$\forall\varepsilon > 0\exists N\forall m \geq N[|a_m - c| < \varepsilon]$$

を $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1}{K^2 + |c|K + c^2}$ に適用すると

$$\forall m \geq N[|a_m - c| < \frac{\varepsilon_1}{K^2 + |c|K + c^2}] \tag{2}$$

となる N が存在する。$n \geq N$ とする。このとき、(1),(2) より

$$|a_n^3 - c^3| \leq |a_n - c|(K^2 + |c|K + c^2) \leq \frac{\varepsilon_1}{K^2 + |c|K + c^2}(K^2 + |c|K + c^2) = \varepsilon_1.$$

従って

$$\exists N\forall n \geq N[|a_m - c| < \varepsilon_1].$$

ε_1 は任意の正数だったので

$$\forall\varepsilon_1 > 0\exists N\forall m \geq N[|a_m - c| < \varepsilon_1].$$

すなわち $\lim_n a_n^3 = c^3$. ∎

$\boxed{2}$ $\lim a_n = c$ かつ $\forall n[a_n \neq 0]$, $c \neq 0$ ならば $\exists L > 0\forall n[|a_n| > L]$.
証明.

$$\forall\varepsilon > 0\exists N\forall m \geq N[|a_m - c| < \varepsilon] \tag{3}$$

とする。$c \neq 0$ より、$|c|/2 > 0$ なので、(3) を $\varepsilon = |c|/2$ に適用できる。従って

$$\forall m \geq N[|a_m - c| < |c|/2]$$

となる N がある。$m \geq N$ とすると

$$|a_m| \geq |c| - |a_m - c| > |c|/2.$$

そこで、$L := \frac{1}{2}\min\{\, |a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |c|/2 \,\}$ とおくと、これは正数。$m \in \mathbf{Z}$ とする。$m < N$ または $m \geq N$ なので、場合分けをして考える。

- $m < N$ ならばあきらかに $a_n > L$
- $m \geq N$ ならば $|a_m| > |c|/2 > L.$

以上により、$n \in \mathbf{N}$ ならば $|a_n| > L$ が示された。すなわち $\forall n \in \mathbf{Z}[|a_n| > L]$. よって $\exists L > 0\forall n \in \mathbf{Z}[|a_n| > L]$. ∎

$\boxed{3}$ $\lim a_n = c$ かつ $\forall n[a_n \neq 0]$, $c \neq 0$ ならば $\lim \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{c}$.

証明. 略解　前問の L をとると

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{c}\right| = \frac{|a_n - c|}{|a_n c|} < \frac{|a_n - c|}{|Lc|}.$$

そこで $\varepsilon = |Lc|\varepsilon_1$ とすればよい。∎

$\boxed{4}$ $\lim a_n = c$,$\lim b_n = d$ ならば $\lim a_n b_n = cd$.
証明. 略解　K を $\{\, a_n \,\}$ の上限とし、$M = \max\{\, K, |d| \,\}$ とおくと、

$$|a_n b_n - cd| = |a_n(b_n - d) + (a_n - c)d| \leq K \leq M(|b_n - d| + |a_n - c|).$$

∎