6 第6回：関数の極限

きょうの予定

- 小テスト： $\lim a_n = c$ ならば $\lim a_n^2 = c^2$ となることを証明せよ。
- 関数の極限

資料の訂正 第 4 回資料 p4–1 (4.1.3) は $\boxed{\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q}$.

6.1 関数の極限

関数の連続性の第 2 の定義は、関数の極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ を導入すると、$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ と簡明に表現される、ただし、

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x\ [\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon\ ].$$

6.2 数列の極限の定義との比較

両方とも、論理式としては ∀∃∀ 型をしている：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} [n \in [N, \infty) \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon]$$

ただし、$[N, \infty) := \left\{\ n \in \mathbf{N}\ \middle|\ n \geq N\ \right\}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in \mathbf{R} [x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon]$$

6.3 数列の極限と関数の極限の関係 (1)

定理 6.1 $\lim_{x\to a} f(x) = c$ とする。このとき、実数列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が a に収束するならば実数列 $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ は c に収束する。（ここで $f(a_n)$ は定義されているとする）。

証明. $\lim_{x\to a} f(x) = c$ とする。すなわち、

$$\forall\varepsilon_1 > 0 \exists\delta > 0 \forall x\ [\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-c| < \varepsilon_1\ ]. \tag{1}$$

さらに、$\lim_{n\to\infty} a_n = c$ とする、すなわち、

$$\forall\varepsilon_2 > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} [n \geq\ \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon_2] \tag{2}$$

とする。目標は

$$\forall\varepsilon_3 > 0 \exists N_3 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} [n \geq N_3 \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon_3]. \tag{2}$$

（以下の議論の見取り図として図 1 を参照.）そこで、$\varepsilon_3 > 0$ を勝手な実数とする。(1) を $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ に適用して

$$\forall x\ [\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-c| < \varepsilon_3\ ]. \tag{3}$$

となる正数 δ を選ぶ。$n \in \mathbf{N}$ とし、$x = a_n$ に (3) を適用すると、

$$|a_n - a| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - c| < \varepsilon_3 \tag{4}$$

となる。さらに、(2) を $\varepsilon_2 = \delta$ に適用して

$$\forall n \in \mathbf{N} [n > N_2 \Rightarrow |a_n - a| < \delta] \tag{5}$$

となる N_2 を選ぶ。このとき、$n > N_2$ とすると、(5) により $|a_n - a| < \delta$ であるが、(4) より $|f(a_n) - c| < \varepsilon_3$ となる。すなわち

$$\forall n > N_2 [|f(a_n) - c| < \varepsilon_3.$$

よって

$$\exists N \in \mathbf{N} \forall n > N [|f(a_n) - c| < \varepsilon_3.$$

ε_3 は勝手な正の実数だったので、(3) が示された。以上により、(2) から (3) が導かれることが示された。 ∎

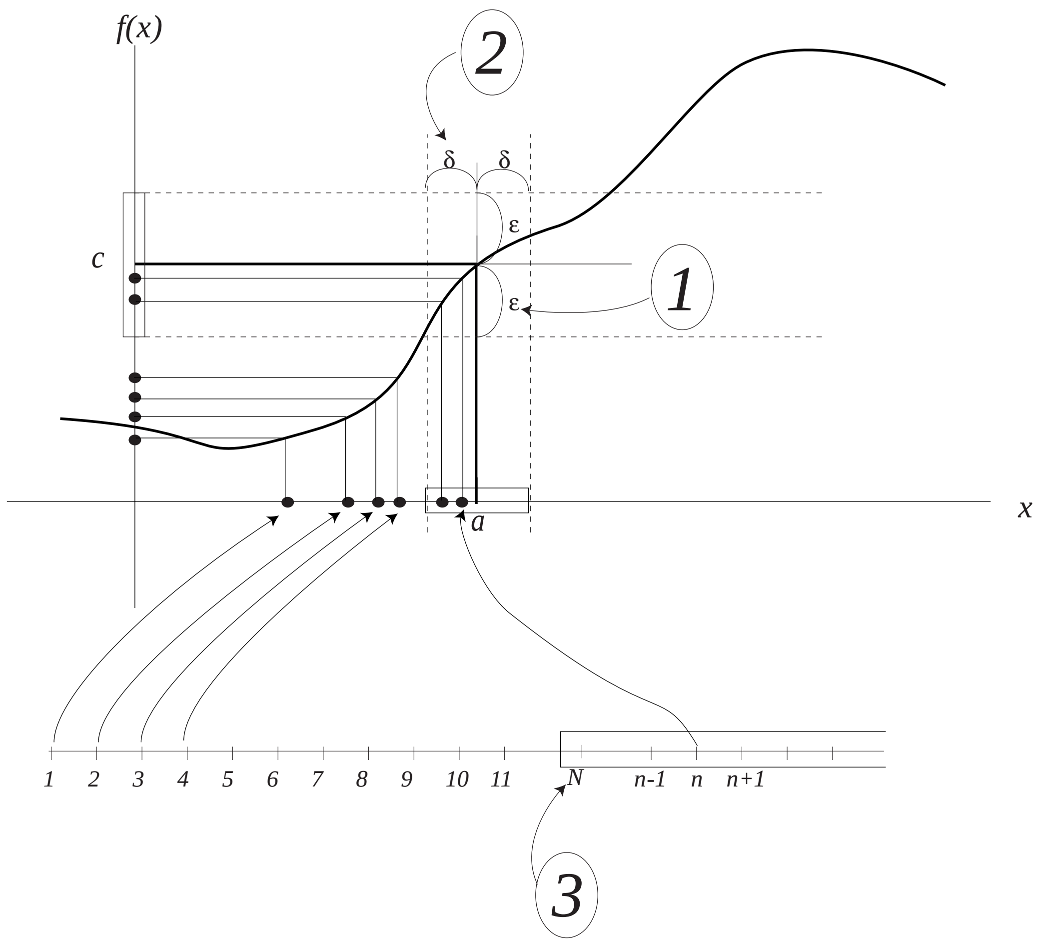

図 1: 証明の構成

6.4 数列の極限と関数の極限の関係 (2)

定理 6.2 実数列 $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が a に収束するならばかならず実数列 $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ が c に収束するとする。すなわち

$$\forall(a_n):\text{実数列}\,[\lim_{n\to\infty} xa_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = c]$$

とする。このとき、$\lim_{x\to a} f(x) = c$ とである。

証明. 主張の対偶を示す。

$\lim_{x\to a} f(x) = c$ ではないとする。すなわち

$$\exists\varepsilon > 0\forall\delta > 0\exists x \in \mathbf{R}[|x-a| < \delta \wedge |f(x)-c| \geq \varepsilon] \tag{1}$$

とする。このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるが $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = c$ とはならない数列 (a_n) の存在を示せば良い。

(1) により、

$$\forall\delta > 0\exists x \in \mathbf{R}[|x-a| < \delta \wedge |f(x)-c| \geq \varepsilon_1] \tag{2}$$

を満たす正の実数 ε_1 を選ぶ。

これは、a にどんなに近いところにも $|f(x)-c|$ が ε_1 以上の x があることを意味する。これを用いて、a に収束する数列で、f を作用させてたとき、いつも c と ε_1 以上隔たりがあるものが作れる。

実際、$n\in\mathbf{N}$ とするとき、$\delta = 1/n$ に (2) を適用してより、

$$|x-a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x)-c| \geq \varepsilon_1 \tag{3}$$

となる $x\in\mathbf{R}$ を選び、それを a_n とする。こうして定義される数列 (a_n) は a に収束する。実際、任意の正数 ε_2 に対し、$n > [1/\varepsilon_2]+1$ ならば $|a_n - a| < 1/n < \varepsilon_2$. すなわち

$$\forall\varepsilon_2 > 0\exists N\forall n > N[|a_n - a| < \varepsilon_2].$$

ゆえに、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

しかし、

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = c \tag{4}$$

とはならない。これを背理法で示そう。(4) が正しいとする、すなわち

$$\forall\varepsilon_3\exists N\forall n > N[|f(a_n)-c| < \varepsilon_3]$$

とする。これを $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$ に適用すると、

$$n > N \Rightarrow |f(a_n)-c| < \varepsilon_1$$

となると $N\in\mathbf{N}$ が存在する。とくに

$$|f(a_{N+1})-c| < \varepsilon_1.$$

これは (3) と矛盾する。よって (4) ではないことが示された。

以上により、数列 (a_n) は a に収束するが、数列 $(f(a_n))$ は c に収束しないことがわかった。以上により、命題の結論を否定したことから、命題の仮定の否定が導かれたので、命題が正しいことが示された。 ∎

6.5 宿題

配布した資料[1]を（紙と鉛筆を用意し）「精読」する。紙と鉛筆をどのように使うかいろいろ工夫してみよ。たとえば、

(i) 用語が出てきたら、それを含む文を作成する。e.g. 「1 は $\{1,2,3\}$ の元である。」「1 は $\{1,2,3\}$ に属す。」「1 は $\{1,2,3\}$ に含まれる。」「$\{1,2,3\}$ は 1 を含む。」

(ii) 記号が出てきたら、別の文字に置き換えて、いろいろ書いてみる。
- $a \in M$:$x \in y$, $\mathbf{N} \in \{\mathbf{N}\}$, $3 \notin \{1,2,4,5\}$, etc.
- $\left\{ x \,\middle|\, C(x) \right\}$: $\left\{ a \,\middle|\, a^2+a+1=0 \right\}$, $\left\{ (x,y) \,\middle|\, x+y \text{は完全数} \right\}$,

(iii) 定義があれば、例と反例を複数考える。

(iv) 図示できるものは図で書いてみる。

(v) 定義を論理式で表現してみる。

(vi) 「明らかに」は「著者にとって明らか」なだけなので、自分で調べることは省けない。（「やればできる」こともやらなければならない。「やればできる」ことはやらなければいいのであれば避難訓練などいらない。）

(vii) 一応通読したら、導入的説明をすべて省いて、論理的な骨組みだけ書き出し圧縮してみる。

[1]弥永昌吉・小平邦彦著「現代数学概説１」（岩波 1961）