7 第 7 回：集合論

きょうの予定

- 集合論
- 数学の本を読むときの注意

来週 (6/17) は休講．補講は 8 月 18 日の予定.

7.1 本を読むときの注意

数学の本の中の文は、いろいろな役割を果たす．論理的には不要に思えることが沢山かいてあるが、それがなければ読んでいて何もわからないはずである．しかし、論理的な骨組み以外の説明には「これしかない」という決定版などはなく、むしろ、著者の感性や信念が表にでる．その感性が自分の感性と合わないときは、読むのに多大な骨が折れる．そこで、鉄則は

- 本で勉強する場合には、複数の本を同じ項目について読み比べて無理なく読めるものを選ぶ.

さて、数学の本にはいくつかの＜クセ＞がある。それを知っておくと無駄な努力がはぶける場合がある。

(1) **基礎概念の定義**．ある分野の基盤となる言葉に対して最初与えられる概念的説明は聞き流してよい。それ以降の展開を通して意味は初めて明らかになる。

(2) **具体例.** それに対して具体例の重要性はいくら強調してもし足りない.「たとえば」という言葉に出会った場合には、ここが正念場と思うくらいでなければいけない．同じような例を自分で作ってみよう.

(3) **言葉の導入**．文中でそれがどのように使われるかの説明も重要.
自分でいろいろな文や疑問文を作ってみよう.

(4) **記号の導入**．重要.
記号を何度も書いてみよう。また、変化できる部分は変化させてみよう。

(5) **コメント**．コメントの中には最初は意味がわからないものが多いが、? と印をつけて無視してよい.

(6) **「一般に」**は、話が論理的な骨組みの属することを述べる前に使われる.

(7) **「注意」.** 余り気にしなくてよいことが多い．ある読者には意味があるかもしれないという場合がほとんどである.

(8) **例題**. 必ず解いてみよう。**ヒント**によってどうすればわかっても、それを実際に実行することはまた別のことであり省けない。「やればできる」はやらないことを正当化できない。

(9) 「**〜することがある**」という言い回しは、その本で記号をルーズに使うことをあらかじめ断っておくために使う.

(10) 「**明らかに**」は「証明ははぶく」ということであり、必ず自分で証明してみることは決して省けない（これを省くくらいならば読まない方がよい、何も残らず時間の無駄となるから）.

(11) **定義の言い換え**. 定義の中で、**すなわち〜**、という言い換えが多い. これは不要なようであるが、始めてのことは、少し言い方を変えるだけでわかりやすくなったりならなかったりするので、重要である. 自分にとってわかりやすい言い換えがあったら、それを自分にとっての定義としてしまってよい.

(12) **〜も同様である**. これも「同様にできるはずだから自分でやってみよ」という練習問題と見る必要がある.

(13) 「**〜こともできる**」は、本の構成で、別の方法も有り得たことを示唆するもので、最初の段階では気にすることはない.

7.2 資料の論理的骨子（例）

(1) 基盤となる 2 項関係: $a \in M$. a は 集合 M の要素. a は M に属す. 他の概念はこれをもとに定義される.

(2) 記号 $\{\, a, b, c \,\}$, $\mathbf{N} = \{\, 1, 2, 3, \cdots \,\}$.

(3) **内包性公理** 性質 $C(x)$ があるとき、C を満たす対象の全体を $\left\{\, x \;\middle|\; C(x) \,\right\}$ と書く.

(4) 記号 $(a, b), [a, b], [a, b), (a, \infty), (-\infty, a]$.

(5) 空集合 $\emptyset$. 特徴付け $\forall x [x \notin \emptyset]$.

(6) **外延性公理** $M = M' \overset{def}{\iff} a \in M \Leftrightarrow a \in M'$.

(7) M は M' の部分集合である（$M \subseteq M'$） $\overset{def}{\iff} a \in M \Rightarrow a \in M'$.

(8) $M \subseteq M'$ かつ $M \neq M'$ のとき M は M' の**真部分集合**といい、$M \subsetneq M'$ と書く[1].

(9) $M \cup N := \left\{\, x \;\middle|\; x \in M \text{ または } x \in N \,\right\}$.

(10) $M \cap N := \left\{\, x \;\middle|\; x \in M \text{ かつ } x \in N \,\right\}$.

(11) 分配法則. $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$.

[1] 2つの流儀があるので本を読むとき注意がいる. $M \subset N$ と書かれているとき、これが、$M = N$ を含めているか否かを確認する必要がある. 最近の数学科では $M = N$ を含めている. しかし、古い本では $M \neq N$ の場合だけ使う. この講義では $M \subset N$ という記号は使わず、$M \subseteq N$ により部分集合、$M \subsetneq N$ により真部分集合を表す.

(12) $M - N := \left\{ x \;\middle|\; x \in M \text{かつ} x \notin N \right\}$.
(13) $M^c := M^{c\Omega} := \Omega - M$.
(14) De Morgan の法則 $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$.
(15) $M \times N := \left\{ (a,b) \;\middle|\; a \in M \text{かつ} b \in N \right\}$. ただし、

$$(a,b) = (a',b') \overset{def}{\Longleftrightarrow} a = a' \text{かつ} b = b'.$$

7.3 べき集合

集合 Ω の部分集合をすべて集めた集合を Ω の**べき集合**とよび、$\mathcal{P}(\Omega)$ と書く. この集合上には自然な**構造**がいくつかある.

7.3.1 順序構造

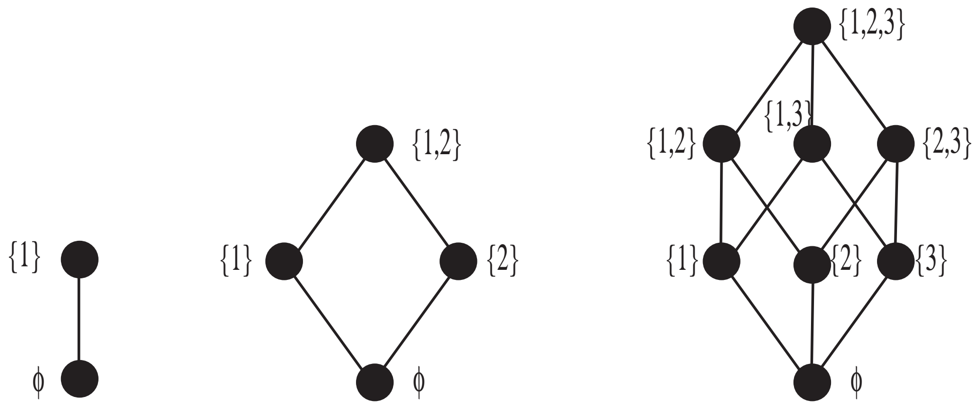
関係 $M \subseteq N$ は次をみたす。

反射律 $N \subseteq N$,

推移律 $M \subseteq M', \quad M' \subseteq M'' \Rightarrow M \subseteq M''$.

反対称律 $M \subseteq M', \quad M' \subseteq M \Rightarrow M = M'$.

順序構造はハッセ図で図示すると便利な場合がある. $L \subseteq N$ だが、$L \subsetneq A$, $A \subsetneq N$ となるような A がないとき、N は L の直上にあるという. 大きなものは小さなものの上にあるように各部分集合を平面の点で表し、N が L の真上にあるときには、N と L を線で結んだものがハッセ図.



演習問題 $\{1,2,3,4\}$ のべき集合のハッセ図を描け.

7.3.2　上限としての $\cup$

資料 p3 [29] の部分を補足しよう．

反射律、推移律、反対称律を満たす関係 $\prec$ を順序関係と呼ぶ．集合とその上の順序関係の組 $(X, \prec)$ を順序集合（poset(partially ordered set)) と呼ぶ．

上限はいろいろな言い方で定義できる．

定義１　順序集合 $(X, \prec)$ を以下考える．$z \in X$ が $x, y \in X$ の**上限**であるとは、

(S1) $x \prec z$ かつ $y \prec z$

(S2) $x \prec w$ かつ $y \prec w$ ならば $z \prec w$.

このとき、$z = x \vee y$ と書く．

定義２　$x \vee y$ は x, y よりも大きく、しかもそのような元の中で最小のものである．

定義３　$x \vee y$ は x と y との最小上界である, ただし、(S1) を満たす z を x, y の上界 (upper bound) という．

定義３は上限の本質を表現している．定義１は、上限の論理的内容を表現している．(上界という概念も不可欠.）

練習問題　　x が順序集合 $(X, \prec)$ の中で最小の元である、という概念を数学的に定義せよ．また、最小元は、存在するならば唯一であることを示せ．

7.4 ブール代数

べき集合は 2 項演算 $x \cap y, x \cup y$ と 1 項演算 x^c を持つ．これは、数の演算 $x \times y, x + y, -x$ と似た性質を持つ。以下 $\cap$ を $\wedge$, $\cup$ を $\vee$, また $x^c = x'$ とあらわす。

まず、共通する性質は

結合律 $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.

可換性 $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$.

$\wedge$ **の分配律** $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

0,1 $0 \vee x = x$, $0 \wedge x = 0$, $1 \wedge x = x$.

補元の性質 $x'' = x$.

違う性質は

$\vee$ **の分配律** $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

吸収律 $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$.

1 の性質 $1 \vee x = 1$.

de Morgan $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

補元の性質 $x \wedge x' = 0$, $x \vee x' = 1$.

7.4.1 ブール代数の元の積和標準形

集合 A, B, C がブール式があるとき、それは、$A^{[']} \wedge B^{[']} \wedge C^{[']}$ 型の式のいくつかの $\vee$ として（順序を除いて唯一の仕方で）書ける（$A^{[']}$ は A, A' のいずれか)。

7.4.2 命題論理式の定めるブール代数

論理式の集合は、$P \wedge Q$,$P \vee Q$, $\neg P$ の演算によりブール代数となる。ただし、論理同値な論理式は同じと考える。最大元は恒真命題、最小元は恒偽命題。

7.5 宿題と次回の小テスト

来週の小テストは問 7-1 のいずれか。

(問 7-1) 次を証明せよ。(L, N, A, B, C, D, M は Ω の部分集合とする。)

(a) $L \subseteq N \quad \Leftrightarrow \quad L = L \cap N.$

(b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C).$

(c) $M \supseteq D$ かつ $D \cap L = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad D \subseteq M - L.$

(d) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$

(問 7-2) $(A \times B) \cup (C \times D)$ と $(A \cup C) \times (B \cup D)$ の関係は如何. (後者に別の表示をあたえよ。)

(問 7-3) ブール代数について次を示せ

(a) $x'' = x$ は他の性質から導かれる.

(b) $x = y \quad \Leftrightarrow \quad \exists a[a \wedge x = a \wedge y$ かつ $a \vee x = a \vee y].$

(問 7-4) 次のブール式を積和標準形になおせ。

(a) $(x \vee y) \wedge (x' \wedge y)',$

(b) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z).$

(問 7-5) 積和標準形を使って次の等式が正しいかどうかそ調べよ。

(a) $(x \wedge (y \vee z)')' = (x \wedge y)' \vee (x \wedge z).$

(b) $x = (x' \vee y')' \vee (z \vee (x \vee y)')$

(問 7-6) 配付した資料[2]を精読せよ。

[2]河田敬義・三村征雄「現代数学概説 II」(岩波１９６５)