8 第 8 回：集合論 (2):写像

きょうの予定

- 小テスト
- 集合論:写像

8.1 資料の論理的骨子（例）

(1) 写像 $\boxed{f : A \to B}$. (A:定義域 (domain), B:値域 (range))

(2) $a \in A, b \in B$ に対し $\boxed{b = f(a)}$ なる「関係」が基本となる。
$f(a)$ を fa を省略することが多い。$f(a)$ の呼び方は f of a.

(3) (写像の外延性公理) $\boxed{f = g \overset{def}{\iff} \forall a \in A[f(a) = g(a)]}$.

(4) 写像の制限. $f : A \to B$, $C \subseteq A$ のとき、写像 $g : C \to B$ が

$$\forall c \in C[g(c) = f(c)]$$

により定義される。この g を f の C への制限といいただ一つきまる。これを $f|C$ と表す。(f は g の拡大というが、これは g に対してただ一つ決まるわけではないので、記号は導入できない。)

(5) 写像のグラフ:$G(f) := \left\{ (a, f(a)) \;\middle|\; a \in A \right\} \subseteq A \times B$.

(6) 写像のグラフの特徴付け:$E \subseteq A \times B$ が、写像のグラフとなるための必要十分条件は
(a) $\forall a \in A \exists b \in B[(a, b) \in E]$,
(b) $\forall a, \in A \forall b, b' \in B[(a, b) \in E \wedge (a, b) \in E \Rightarrow b = b']$.
この条件はまとめると

$$\forall a \in A \exists_1 b \in B[(a, b) \in E]$$

と書ける。ただし $\exists_1 b \in B[Q(b)]$ は、Q を満たす b がただ一つ存在することを意味する。

(7) 特殊で重要な写像.

定値写像 (constant function) $b \in B$ は、写像 $c_b : A \to B$ を与える:$\forall a \in A[c_b(a) = b]$

恒等写像 (identity map) $1_A : A \to A$. $\forall a \in A[1_A(a) = a]$.

(8) 写像の合成. $f : A \to B$, $g : B \to C$ に対し、合成写像 $g \circ f : A \to C$ が定義される。$\boxed{(g \circ f)(a) := g(f(a))}$ $(a \in A)$.

(9) 結合律 (associativity): $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(10) 射影:$pr_A : A \times B \to A$, $pr_B : A \times B \to B$.

(11) 直積写像:$f_1 : A_1 \to B_1$ と $f_2 : A_2 \to B_2$ に対し

$$f_1 \times f_2 : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2.$$

(12) $f : X \to Y$ は $f : PX \to PY$ と $f^{-1} : PY \to PX$ を引き起こす。

(a) $A \subseteq X$ に対し $\boxed{f(A) = \left\{ f(a) \;\middle|\; a \in A \right\}}$.

(b) $B \subseteq Y$ に対し $\boxed{f^{-1}(B) := \left\{ a \in A \;\middle|\; f(a) \in B \right\}}$.

(13) f^{-1} はブール代数の構造を保つが、f は保たない。

8.2 練習問題の解答

8.2.1 p7–4

順序集合 $(X, \prec)$ における最小元の定義.

$$m\text{が最小元} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in X[m \prec x].$$

命題. 最小元は、存在すればただ一つしかない。

証明.

$$m, m'\text{が最小元ならば } m = m' \qquad (*)$$

を示せばよい。m, m' が最小元であるとする。m が最小元であることから

$$\forall x \in X[m \prec x].$$

これを $x = m'$ に適用すると $m \prec m'$ を得る。同様にして $m' \prec m$. ゆえに反対称律より、$m = m'$. 以上により $(*)$ が示された。 ∎

8.3 宿題の解答

8.3.1 (問 7–1)

次を証明せよ。(L, N, A, B, C, D, M は Ω の部分集合とする。)

1. $L \subseteq N \quad \Leftrightarrow \quad L = L \cap N.$
証明. まず、
$$L \subseteq N \text{ ならば } L = L \bigcap N \tag{0}$$
を示す。
$$L \subseteq N \tag{1}$$
と仮定する。明らかに
$$L \bigcap N \subseteq L \qquad (2).$$
そこで $L \subseteq L \bigcap N$ を示そう。
$$x \in L \tag{3}$$
とする。仮定 (1) より、$x \in N$. これと (3) より $x \in L \bigcap N$. したがって
$$x \in L \Rightarrow x \in L \bigcap N$$
が示された。x には制約はないので
$$L \subseteq L \bigcap N \qquad (4).$$
(2,4) により $L = L \bigcap N$. (1) を仮定してこれが示されたので (0) が示された。

次に、逆
$$L = L \bigcap N \text{ ならば } L \subseteq N \tag{5}$$
を示そう。
$$L = L \bigcap N \tag{6}$$
を仮定する。
$$x \in L \tag{7}$$
とする。このとき、(6) より $x \in L \bigcap N$. すなわち $x \in L$ かつ $x \in N$. とくに
$$x \in N \qquad (8).$$
よって、
$$x \in L \Rightarrow x \in N.$$
すなわち $L \subseteq N$. (6) を仮定してこれが示せたので、(5) が示された。 ∎

2. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
証明.

$$(A \cup B) - C \subseteq (A - C) \cup (B - C) \qquad (b1)$$

$$(A \cup B) - C \supseteq (A - C) \cup (B - C) \qquad (b2)$$

を示せばよい。

(b1) **の証明**.

$$x \in (A \cup B) - C \qquad (b3)$$

とする。定義より

$$x \in A \cup B \qquad (b4)$$

かつ

$$x \notin C \qquad (b5).$$

(b4) より

$$x \in A \qquad (b6)$$

または

$$x \in B \qquad (b7).$$

場合分けをする。
$(b6)$ の場合. このとき、(b5) より

$$x \in A - C \qquad (b8).$$

したがって

$$x \in (A - C) \cup (B - C) \qquad (b8).$$

$(b7)$ の場合. このとき、(b5) より

$$x \in B - C \qquad (b9).$$

したがって、やはり (b8) が成立。
よって、可能性のある (b6,b7) のいずれの場合にも (b8) が成り立つので (b8) は正しい。以上で (b3) ならば (b8) が示されたが、x は任意だったので、(b1) が示されたことになる。

(b2) **の証明**.

$$x \in (A - C) \cup (B - C) \qquad (b10)$$

とする。このとき

$$x \in A - C \qquad (b11)$$

または

$$x \in B - C. \qquad (b12)$$

$(b11)$ の場合. このとき

$$x \in A \qquad (b13)$$

かつ

$$x \notin C. \qquad (b14)$$

(b13) より

$$x \in A \cup B \tag{b15}$$

(b12) の場合 このとき

$$x \in B \tag{b16}$$

かつ (b14). (b16) より (b15) が成り立つ。
以上により、いずれの場合にも (b15),(b14) が成り立つ。すなわち、(b3) が成り立つ。
以上により (b10) から (b3) が導かれ、x には制約はなかったので、(b2) が示された。
∎

3. $M \supseteq D$ かつ $D \cap L = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad D \subseteq M - L.$
証明. まず論理式に名前をつける：

$$M \supseteq D \tag{c1}$$

$$D \cap L = \emptyset \tag{c2}$$

$$D \subseteq M - L. \tag{c3}$$

最初に (c1,c2) を仮定する。

$$x \in D \tag{c4}$$

とする。このとき、(c1) より

$$x \in M. \tag{c5}$$

また、

$$x \notin L. \tag{c6}$$

でなければならない。なぜならば、そうでないとすると、(c5) と共に、$x \in M \cap L$ となりこれは、(c2) に矛盾するからである。(c5,6) より (c3) を得る。以上により (c1,c2) から (c3) が導かれた。
逆に (c3) を仮定しよう。まず (c1) を示そう。

$$x \in D \tag{c7}$$

とする。(c3) より

$$x \in M \qquad .(c8)$$

したがって、(c7) から (c8) が導かれるので (c1) が示された。
次に (c2) を背理法で示そう。

$$D \cap L \neq \emptyset \tag{c10}$$

とする。このとき

$$a \in D \tag{c11}$$

かつ

$$a \in L \tag{c12}$$

を満たす a が存在する．仮定 (c3) により (c11) から

$$a \notin L$$

となるが、これは (c12) と矛盾する。よって、仮定 (c10) は正しくない。すなわち、(c2) がなりたつ。 ∎

8.4 全射と単射

写像 $f : A \to B$ が**単射**(１対１,injective) $\overset{def}{\iff} \forall x \in A \forall y \in A[f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$.

写像 $f : A \to B$ が**全射**(上へ,surjective) $\overset{def}{\iff} \forall y \in B \exists x \in A[y = f(x)]$.

写像 $f : A \to B$ が全単射 (bijection) $\overset{def}{\iff}$ 逆写像 $g : B \to A$ が存在する、ただし、g が f の逆写像であるとは

$$f \circ g = 1_B \quad g \circ f = 1_A.$$

逆写像は高々一つしかない。そこで f の逆写像があるときそれを f^{-1} と書く。

証明. g, h が f の逆写像とすると。

$$g = g \circ 1_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = 1_A \circ h = h.$$

∎

例題　全単射写像は全射かつ単射である。

証明. $f : A \to B$ を全単射写像とする。

全射性の証明.　$y \in B$ とする.

$$y = 1_B(y) = (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)).$$

したがって $a := f^{-1}(y) \in A$ とおくと $y = f(a)$. ゆえに

$$\exists x \in A[y = f(x)]$$

が示された。y は任意だったので $\forall y \in B \exists x \in A[y = f(x)]$ となる。すなわち、f は全射である。

単射性の証明.　$x, y \in A$ とし、$f(x) = f(y)$ とする。このとき

$$x = 1_A(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) = (f^{-1} \circ f)(y) = 1_A(y) = y.$$

すなわち、$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ が示された。x, y は A の任意の要素だったので、

$$\forall x, y \in A[f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$$

すなわち f が単射であることが示された。

∎

例題　全射かつ単射な写像は全単射である.

証明. $f : A \to B$ が全単射であるとする。$b \in B$ とする。このとき次が示せる：

補題.　$f(a) = b$ を満たす a がただ一つ存在する。

そこで、この a を $g(b)$ と書くことにする。$b \in B$ は任意だったので、これにより写像 $g : B \to A$ が定まる。これは f の逆写像となっている。

- $b \in B$ とする。 $g(b)$ の定義より $f(g(b)) = b$. よって、

$$\forall b \in B[f(g(b)) = b]. \tag{$*$}$$

すなわち $f \circ g = 1_B$.

- $a \in A$ とする。上の式 (*) を $b = f(a)$ に適用すると $f(g(f(a))) = f(a)$. f は単射なので $g(f(a)) = a$. よって

$$\forall a \in A[g(f(a)) = a].$$

以上により、g が f の逆写像であることがわかった。 ∎

8.5 宿題

来週の小テストは「f が逆写像を持てば、全射でありかつ単射である」を証明。

1. $f \circ g$ が全射ならば f は全射であることを示せ。
2. $f \circ g$ が単射ならば g は単射であることを示せ。
3. 全射の合成は全射であることを示せ。