9 第9回：集合論 (3):写像 (2)

きょうの予定

- 集合論:写像 (2)

9.1 「同一視」という言葉の使い方

写像 $v : \{ 1, 2, 3 \} \to \mathbf{R}$ とベクトル

$$(v(1), v(2), v(3)) \in \mathbf{R}^3$$

とは 1 対 1 に対応している。このとき**写像 v をベクトル $(v(1), v(2), v(3))$ と同一視 (identify) する**という。

この意味は次の通りである。

> 写像
>
> $$F : Map(\{ 1, 2, 3 \}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}^3$$
>
> を $F(v) := (v(1), v(2), v(3))$ と定めると全単射となる。そこで、以下の議論では、**この全単射を通して**、$v \in Map(\{ 1, 2, 3 \}, \mathbf{R})$ と $F(v)$ とは同じものの 2 つの表現であると考え区別しない。

これは「全単射 F により 2 つの集合 $Map(\{ 1, 2, 3 \}, \mathbf{R})$,$\mathbf{R}^3$ を同一視する」という言い方で表現する。

注意 1. どの全単射を使って同一視しているかが明確であることが重要である。

たとえば、$G(v) = (v(3), v(2), v(1))$ も全単射 $G : Map(\{ 1, 2, 3 \}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}^3$ を与える。特別な状況では G で同一視する方が便利な場合もあるが、「ふつう」は F で同一視する。

注意 2. 通常、「標準的」な全単射がある場合に「同一視」する。

9.2 写像とグラフの同一視

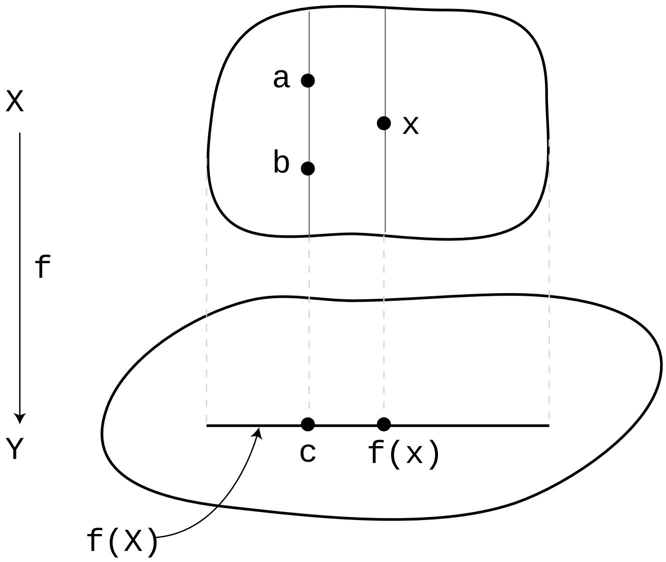
写像 $f : X \to Y$ と部分集合 $\left\{ (x, f(x)) \;\middle|\; x \in X \right\} \subseteq X \times Y$ とを同一視する。ただし、部分集合 $R \subseteq X \times Y$ が X から Y への写像グラフとなる条件は

$$\forall x \in X \exists_1 y \in Y [(x, y) \in R].$$

$\forall x \exists y$ **と** $\exists y \forall x$ **の違い**

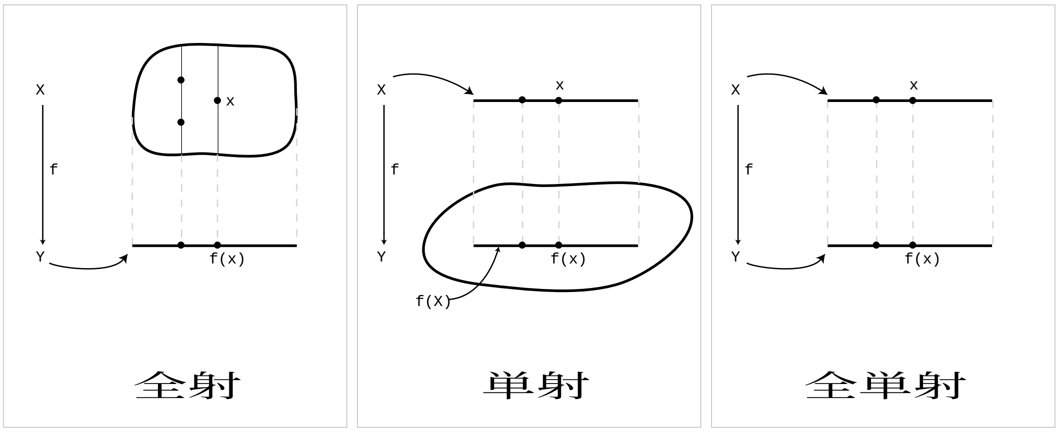
9.3 写像の模式図

「一般的」写像の様相は次の模式図で考えるとわかりやすい。



ここで、a, b のように垂直方向の同じ線上にある X の要素は f で同じ要素に写されると考える。$(f(a) = f(b) = c)$

この模式図は全射・単射・全単射の場合は以下のように「退化」する：



9.4 写像の例:タイプ 1

以下の全単射は標準的なもの $(f \mapsto (f(i))_{i \in I})$ であり、それで両辺は同一視される。

9.4.1 リスト

$$Map(\{\ 1, 2, 3, \cdots, n\ \}, X) \simeq X^n := \left\{\ (x_1, x_2, \cdots, x_n)\ \middle|\ x_i \in X\ \right\}.$$

9.4.2 添え字付き族

$$Map(I, X) \simeq X^I := \left\{\ (x_i)_{i\in I}\ \middle|\ x_i \in X\ \right\}.$$

9.4.3 集合族

$$Map(I, PX) \simeq PX^I := \left\{\ (A_i)_{i\in I}\ \middle|\ A_i \subseteq X\ \right\}.$$

9.4.4 数列

$Map(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \simeq \{$ 無限実数列 $\}$.

9.5 紛らわしい記号

f^{-1} は文脈によって 2 重の意味を持つので注意を要する。$f : X \to Y$ とする。

1. $y \in Y$ に対し、
   - 一般の f について $f^{-1}(y)$ は

     $$f^{-1}(y) := \left\{\ x \in X\ \middle|\ f(x) = y\ \right\}$$

     により定義され、y の f による逆像（f のファイバー）と呼ばれる。これは $f^{-1}(\{\ y\ \})$ と書けば誤解はないが、ふつうに使われる。
   - f が全単射のときは、逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ による y の値で X の要素

   となる。この 2 つの表記を同時に使うと

   $$f^{-1}(y) \in f^{-1}(y)$$

   という意味のない式になる（左辺は下の意味、右辺は上の意味）。

9.6 $f(A)$ は $f^{-1}B$ よりも論理的に複雑である.

$$y \in f(A) \overset{def}{\iff} \exists a \in A\ [\ y = f(a)\ ]$$

と

$$x \in f^{-1}(B) \overset{def}{\iff} f(x) \in B.$$

を比較せよ。

9.7 要注意の場合

- $f(A \bigcap B) \subseteq f(A) \bigcap f(B)$ だが一般に $f(A \bigcap B) \neq f(A) \bigcap f(B)$.
- $f(A^c) \supseteq f(A)^c$ だが、一般に $f(A^c) \neq f(A)^c$.
- $f(A - B) \supseteq f(A) - f(B)$ だが一般に $f(A - B) \neq f(A) - f(B)$.

9.8 写像の例:タイプ 2

9.8.1 部分集合の特性関数

$$Map(X, \{\ 0, 1\ \}) \ni \chi \mapsto \chi^{-1}(1) \in PX.$$

これにより、しばしば、$PX = 2^X$ と書く。$(2 = \{\ 0, 1\ \})$

9.8.2 分割

$$Surjection(X, \{\ 1, 2, \cdots, n\ \}) \ni f \mapsto (f^{-1}(1), f^{-1}(2), \cdots, f^{-1}(n)) \in Partition_n(X).$$

ただし、

- $Surjection(X, Y)$ は X から Y への全射の全体の集合,
- $Partition_n(X)$ の要素は X の n 個の部分集合への順序のついた分割. すなわち空でない部分集合列 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ で
  - $\forall i, j\ [\ i \neq j \Rightarrow A_i \bigcap A_j = \emptyset\ ]$,
  - $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n = X$.

9.9 宿題

来週の小テストは問 8-1 のいずれか。