2000 後期 数理の世界　第１０回

思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

目 次

6　オートマトン

6.1　背景

離散力学系は時不変（時間によらない）法則で変化する対象を表現する。しかし、現実の対象の多くは部分的に、他の多くの対象の影響下にあるため、時間と共に、変化の仕方自身が変化する。そのような場合に使われる数学的構造が**オートマトン**である。

機械は、人間の操作によって挙動を変えなければ役に立たないから、やはりオートマトンとしてとらえられる。特に、種々の計算機の理論では、オートマトンは基本的な役割を果たす。

6.2　定義

２つの集合 Q, Σ と写像 $\tau : Q \times \Sigma \to Q$ の３つ組 $M = \langle Q, \Sigma, \tau \rangle$ のことを**オートマトン**という。３つの要素は各々次のように呼ばれる。

- 集合 Q は**状態空間**、その元は**内部状態**,
- 集合 Σ は**入力信号空間**、その元は**入力信号**,

[1] URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

[2] 研究室：理学部４号館４０３号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

- τ は**状態遷移写像**.

状態遷移写像による $\langle q, \sigma \rangle$ の値を単に $q.\sigma$ とも書く。オートマトンという数学的構造は以下のような使い方を念頭において使われることが多い。

- 状態空間は、ある対象の内部状態の全体を記述し、
- 入力信号空間は、その対象への働きかけ方の全体を記述し、
- 状態遷移写像は、信号 σ を入力したとき内部状態が q から $\tau(q, \sigma)$ に変化することを記述する。

6.3 「離散力学系の族」としてのオートマトン

オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \tau \rangle$ の入力信号を $\sigma \in \Sigma$ を一つ固定すれば、離散力学系 $M_\sigma = \langle Q, \tau_\sigma \rangle$ を得る、ただし、

$$\tau_\sigma(q) := \tau(q, \sigma).$$

6.4 オートマトンの図示

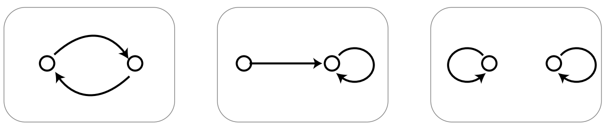
次のようにして、オートマトンは辺にラベルのついたグラフとして表示できる。

- 頂点は Q.
- $q \xrightarrow{\sigma} q' \overset{def}{\Longleftrightarrow} q.\sigma = q'$

6.5 有限オートマトンの数え上げ

$|Q| = 2, |\Sigma| = 2$ の非退化オートマトンは４種類ある。ただしオートマトンが非退化だとは、異なる入力信号は違う変化を引き起こすことをいう。つまり、$\forall q \in Q[\tau(q, \sigma_1) = \tau(q, \sigma_2)]$ ならば $\sigma_1 = \sigma_2$.

数えあげ方．まず、各入力の定める有限力学系は次の３種類。



これを組み合わせると図１のようになる。

6.6 問題

$|Q| = 3, |\Sigma| = 2$ のオートマトンを数え上げよ。ただし、同型なものは同じとみなす。（ヒント：約８０個ある）

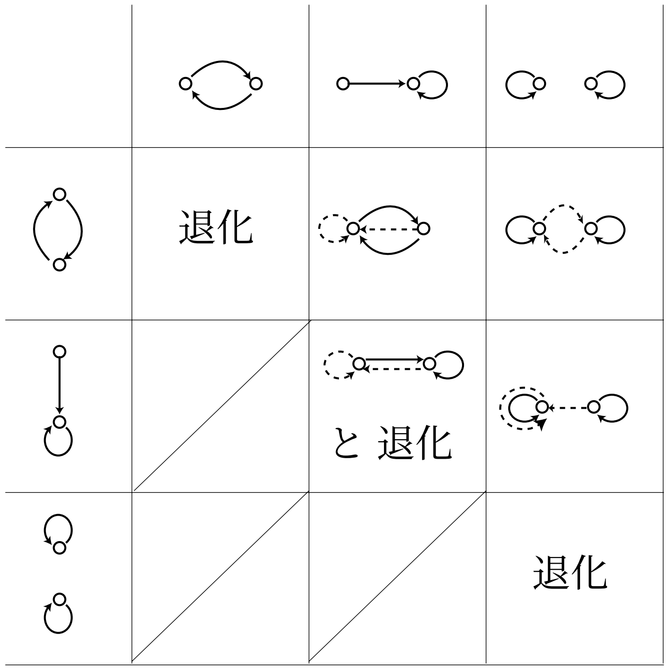


図 1: ２内部状態２入力信号の有限オートマトンの分類

6.7　出力付きオートマトン

機械は信号を受け取るだけでなく、信号（動作なども信号と呼ぶ）を発信する。それを表現するには、「出力写像」を次のように付け加えればよい。

有限オートマトン $M = \langle Q, \Sigma, \tau \rangle$ の出力写像とは

$$\lambda : Q \times \Sigma \rightarrow \Lambda$$

のことである。図示には次のように情報を付け加える：$q.\sigma = q'$, $\lambda(q, \sigma) = \ell$ であるとき

$$q \overset{\sigma/\ell}{\rightarrow} q'$$

と書く.

6.8 例

記憶機械 これは、２つの内部状態 a,b を持ち、入力 0 は内部状態を a の変え、入力 1 は内部状態を b に変える。内部状態が a,b に応じて各々0, 1 を出力する。

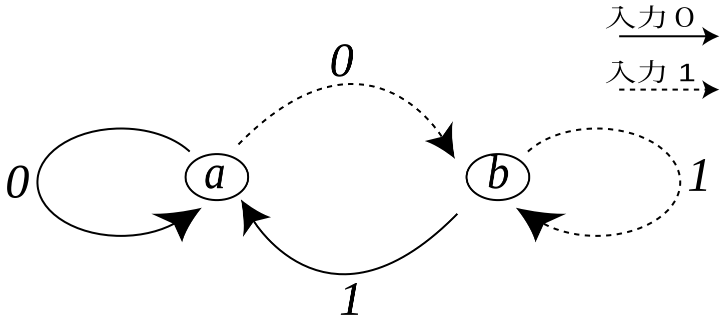
この機械の動作の解釈：入力を記憶し、直前の入力を出力する。

$\Sigma = \Lambda = \{ 0, 1 \}$, $Q = \{ a, b \}$,

τ	a	b
0	a	a
1	b	b

λ	a	b
0	0	1
1	0	1

これは次図であらわされる。



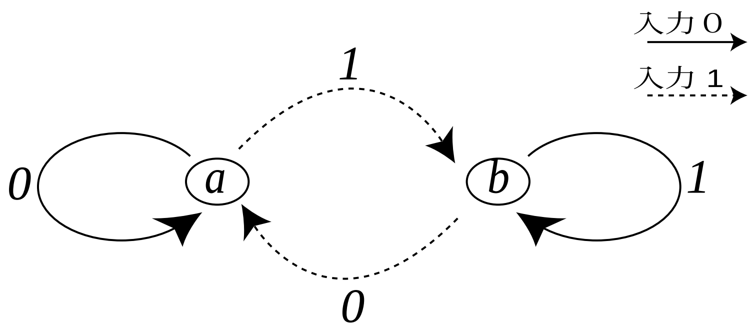
parity counter 入力 0 は内部状態を変えず、入力 1 は内部状態を入れ替える。従って、初期内部状態が a とすると、過去の入力の中にある 1 の個数が偶数か奇数かに応じて a,b という内部状態になる。

このオートマトンは、初期内部状態 a から 0, 1 の入力が続くとき、その時点も含めて過去に入力された 1 の個数の偶奇に応じて 0, 1 を出力する。

τ	a	b
0	a	b
1	b	a

λ	a	b
0	0	1
1	1	0

これは次図であらわされる。



加算機 このオートマトンは、２つの入力端子を持ちそれぞれに同期して入ってくる時系列を２進数とみなしたとき、その和が時系列として出力される。例えば、

- $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0$
- $1, 1, 1, 0, 0, 0, 0$

が入力されるとき（すなわち、順番に $01, 11, 01, 10, 00, 10, 00$ が入力されるとき）これらを逆に並べた 0101010,0000111 という２進数と見たときの和 0110001 が下の桁から時系列 $1, 0, 0, 0, 1, 1, 0$ として出力される。

$\Sigma = \{\, 00, 01, 10, 11 \,\}$, $L = \{\, 0, 1 \,\}$, $Q = \{\, a, b \,\}$. 次の表の中身は遷移 / 出力を意味する。内部状態は、繰り上がりの有無を記憶している。

例えば、b のときに 01 が入力されると、繰り上がりがあるので、それと入力の 1 が加算されて 10 となるので、下１桁の 0 が出力されて繰り上がりがのこるので状態は b のままになる。

	a	b
00	$a/0$	$a/1$
01	$a/1$	$b/0$
10	$a/1$	$b/0$
11	$b/0$	$b/1$

Tsetlin のオートマトン　2 種類の行動 (a,b) を行うオートマトンが、行動に応じて「賞 (1) 罰 (0)」を受けるとする。このとき、罰を避けるために行動を変更する戦略は様々である。そういう戦略をオートマトンで表現できる場合がある。一番単純には次のようなものがある。

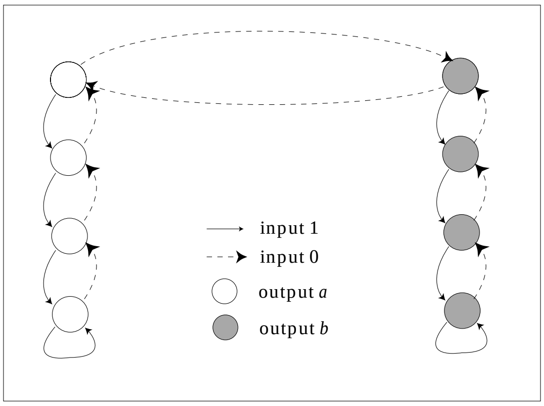


図 2: 単純な戦術

もう少し込み入った戦術としては次のようなものがある。

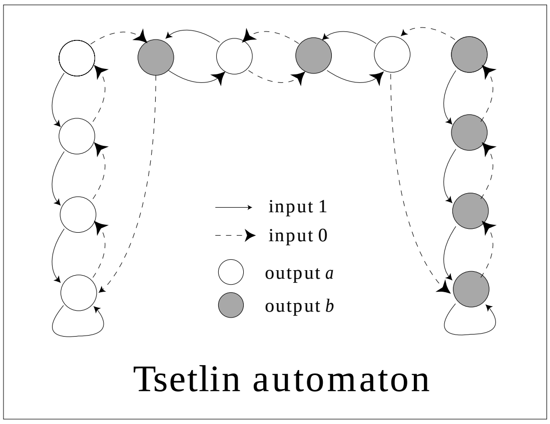


図 3: 慎重な戦術

[**Q9-1**](文学部) 具体的な個別の例から一般的な証明をするにはどのような手順をふんでいけばよいのでしょうか。

(質問理由：高校時代、証明問題が苦手だったことを Collaz の問題を見て思い出しました。やはり個別の例示を積み重ねていくだけでは証明は不十分なのでしょうか。)

[**A9-1**] ある定理について、具体的例で成立していることを観察することと、それを証明することとは、かなり独立した精神的作業です。数学者にとっても、抽象的・論理的に定理を証明しただけでは「安心感」は得られず、種々の具体例で確かに成立していることを確認する作業が不可欠です。

なお、ある抽象的主張が、種々の具体例で成り立っていることが確認される場合、その主張を通常「予想」(conjecture) と呼びます。予想の証明は数学研究の重要な部分を占めており、一般的手順はありません（戦略はありますが)。基本的には、具体例でなぜ成立しているかを詳しく分析することができれば証明が出来ていることが多いです。NGO の "Think globally, act locally" と似ています。"Think abstractly, act concretely" というべきかも知れません。

また、予想を発見すること自身も、数学研究の重要で困難な部分です.

いずれにせよ、種々の個別例を観察することは数学研究の基盤の一つです。数学を専門としない人には、一般的・抽象的表現をとっている数学的主張が、具体的状況で何を意味するかを理解することが先決であり、多くの場合に、それで十分です。

[**Q9-2**](文学部) 数論的力学系とは実際にはどういう場面で使われているんでしょうか（循環小数以外で）

[**A9-2**] 数論的力学系は、力学系の挙動を具体的に実験するのに適しているので取り上げました。それを通した力学系の振る舞いについての理解が、実際の場面で役に立つ（ことがある）と考えています。

[**Q9-3**](法学部) 数学において有限であるとか無限であるという定義は何なのか。

(質問理由：物理はとっていないので力学とは何かよくわかりません)

[**A9-3**]

- 「無限」については古来多くのことが言われてきました。アリストテレスは「可能無限」と「実無限」を区別し、後者を無意味なものとして退けました。可能無限というのは、どの時にもちょっと先の時間があり、どの数にも次の数がある、という意味での無限性です。それに対し実無限は「自然数の全体」のように次々と行える動作を完結した状況を想定するもので、種々の矛盾を孕んでいます。

  １９世紀の終り頃、カントールが集合論を作りましたが、これは実無限を積極的に取り入れたものです。集合論では、自分と自分の部分とが同じ「大きさ」である集合を無限集合と定義します（たとえば、自然数全体の集合は、その一部である偶数全体の集合と１対１の対応があるので、無限集合)。これは実無限の「矛盾」として考えられていたものです。

- 「力学」は、たとえば星がどのような規則に従って運行しているかを、位置・速度・重さと、働く力（星の場合は引力）を用いて説明するための理論です。

[**Q9-4**](「写像」と「変換」がどんなものかがよくわかりません。)

(質問理由：説明がよく理解できなかったので。できれば具体例を示して２つのちがい等を教えてください。)

[**A9-4**] 平面上の点 (x, y) に対して、原点からの距離 $\sqrt{x^2+y^2}$ を対応させることで、平面から実数への写像が得られます。それに対し、平面上の点 (x, y) に対して、平面上の点 $(x+2, y+2)$ を対応させることで、平面の変換（この場合は平行移動）が得られます。

[**Q9-5**]()

- 例えば $1 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{4} 2 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{8} 4..$ の矢印の上の数字は何を表しているのですか。
- ２進法の計算の仕方はわかったのですが、実際山崩しにどう使うのかがよくわからなかった。

[**A9-5**]

- この例では、$1 \xrightarrow{1} 3$ は 10 を 7 で割った商が 1, 余りが 3 ということを表します。
- 次の手順で使います。
  1. 石の数を (n, m, ℓ) とするとき、それぞれを二進数 n_2, m_2, ℓ_2 で表す。
  2. 繰り上がりのないたし算を行う。$n_2 \oplus_2 m_2 \oplus_2 \ell_2$。その結果を k とする。
     - (A) $k = 0$ ならば相手に必勝法がる。もしも相手がそれを知っていれば負けだと観念する。（相手が必勝法を知らず、相手が k がゼロでないままの手を打ってくれれば (B) の場合に変化して勝つ可能性がある。適当に打つと k はゼロにはならないので一方が必勝法を知っているときはたいてい勝てる。）
     - (B) $k \neq 0$ ならば、n_2, m_2, ℓ_2 のいずれか a は $k \oplus_2 a < a$ を満たす。そこで、その山から $a - k \oplus_2 a$ だけ石を取り去ると、k はゼロに変化する（このとき、$k \oplus_2 a$ を十進法に直す計算が必要となる）

2000.12.20

２０００年度後期　数理の世界 第１０回
学部：　学科：
学籍番号：　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください.

1： 良く知っている　2：知らなかった 3：よくわかった　4：大体わかった　5：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
オートマトンの定義	–	–			
オートマトンの図示	–	–			
オートマトンの出力	–	–			

意見・希望などがあればどうぞ：