2000 後期 数理の世界　第１２回

思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

目 次

8　確率の基礎概念と相互情報量

8.1　問題

ある大学で、１年生が落第する確率は 0.05, ２年生は 0.1,　３年生は 0.2 ４年生は 0.3 であとする。ある学生が落第したとするとこの人が４年生である確率はどれだけか？ただし、各学年の数は同じであるとする。

8.2　有限確率論の基礎概念.

根本事象が $e_1, e_2, \ldots, e_n$ の場合を考えよう。その全体を Ω と書いて、根本事象集合と呼ぶ。サイコロの場合には $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, コイン投げなら $\Omega = \{$ 裏、表 $\}$

各根本事象 e の確率 $p(e)$ は $0 \le p(e) \le 1$ を満たす実数。

$$p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$$

が成り立っている。これはもう少し簡潔に

$$\Sigma_{e\in\Omega} p(e) = 1$$

とも書く。

[1]URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp

[2]研究室：理学部４号館４０３号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

事象とは根本事象の集まりのことである。たとえば、サイコロの目が偶数、という事象は$\{\,2,4,6\,\}$、サイコロの目が素数であるという事象は$\{\,2,3,5\,\}$で表される。

事象 $A\subset\Omega$ の確率 $p(A)$ は

$$p(A):=\sum_{a\in A}p(a)$$

で与えられる。

サイコロの目が素数である事象も、偶数である事象も共に確率が 1/2.

写像 $\Omega\to\mathbf{R}$ のことを実確率変数という。勝手な集合 V についても、写像 $x:\Omega\to V$ のことを確率変数という。

たとえば、サイコロ投げの場合には、$V=\{$ 偶、奇 $\}$ とすると、

$$x:\{\,1,2,3,4,5,6\,\}\to\{\,偶,奇\,\}$$

を $x(1)=x(3)=x(5)=$ 奇, $x(2)=x(4)=x(6)=$ 偶 と定義すると、これは確率変数となる。

8.3 条件付き確率

A,B を 2 事象とする。

$$p(A|B):=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

は、事象 B が起こったとしたときに事象 A が起こっている確率を表す。

たとえば、

$$P(目が素数\mid目が偶数)=1/3, P(目が偶数\mid目が素数)=1/3.$$

しかし

$$P(目が平方数\mid目が偶数)=1/3, P(目が偶数\mid目が平方数)=1/2.$$

8.4 Bayes の定理.

$\Omega=E+F$ とする。すなわち、$\Omega=E\cup F$ かつ $E\cap F=\emptyset$ とする。このとき、事象 G について

$$p(E|G)=\frac{p(G|E)p(E)}{p(G|E)p(E)+p(G|F)p(F)}.$$

これにより、各事象 E,F ごとに、事象 G の起こる確率が分かっている場合には、G が起こった場合に E,F が起こる確率が計算出来ることがわかる。

8.5 Bayes の定理の一般の場合

$$p(A_r|B)=\frac{p(B|A_r)p(A_r)}{p(B|A_1)p(A_1)+p(B|A_2)p(A_2)+\ldots+p(B|A_n)p(A_b)}.$$

A レポート問題

次の問題（あるいは今後出す問題）について考察し、レポートとして提出して下さい。

- **単位を必要な人は必ず提出して下さい。**
- 各問の定員２名。ただし、同学科の者は同じ問題をとれない。
- 提出期限は２月１４日です。
- Ａ４版のレポート用紙を使用して下さい。

問４と７ p1–7 宣教師と首刈族パズル（３人ずつの場合、４人ずつの場合）

問５ p1–7 やきもちやきの３亭主

問６ p1–7 水差しパズルのバリエーション

問１８ p5–1 チェス盤上のナイトの動き

問１９ p5–1 sliding game

問２４ p6–2 １山石取りゲームのルールを「１個、３個、４個とれる」としたとき、先手必勝であるための条件を求めよ。

問２５ p6–2 ２山石取りゲームのルールで、１回にとれる石の数に「１〜３個」という制限を付けた場合の先手必勝である条件を求めよ。

問２５，２７－２８ p6–2, p7–4 ２山崩しで、各山からとれる石の数を１〜３個とした場合の Grundy 関数を求めよ。それを用いて、先手必勝であるための条件を求めよ。

問２９ p7–4:チャヌシッツィゲームの Grundy 関数を調べよ。

問３０ p7–5：佐藤のマヤゲームのの Grundy 関数を調べよ。

問Ａ１ p8–2:Collatz の問題がどこまで正しいかを実験的に調べよ。

問Ａ２ 状態数が 5 以下の力学系をすべて列挙せよ。（構造定理を使う））

問 §6.6 p10-2: 状態数が３、入力信号数が２の有限オートマトンを列挙せよ。

問１１－１ p11–1 贋銅貨のパズルを、全体の数が１２の場合に解け。

B　第 11 回質疑

[**Q11-1**](法学部) 情報量の問題は数学がとても役立つと考えられますが、情報量の分野の歴史は古いのですか?

[**A11-1**] C.E.Shanon が 1948 年に創設したものです。

[**Q11-2**](法学部) オートマトンの数え上げ方には何か法則のようなものがないのですか。

(質問理由：$|Q|=2,|\Sigma|=2$ から $|Q|=3,|\Sigma|=2$ になっただけでもオートマトンの数が「異常に増えていたので」、さらに組み合わせが多くなれば、とても地道に数え上げることは出来ないだろうと思ったから。)

[**A11-2**] 個数を数えるだけなら、漸化式を作って求められます。具体的なものを数え上げるのは、それがある程度見渡せたり検索できる範囲しか意味はありません。

[**Q11-3**](法学部) エントロピーをビットで表すのは一応の単位としてだけでとらえていいのですか。

(質問理由：小数点以下の数字で何ビットと言われてもピンとこないから。)

[**A11-3**] 次の回答を参照。

[**Q11-4**](文学部) 結果が n 通りであるときのエントロピーがなぜ $\log_2 n$ で表せるのかよくわかりません。

(質問理由：log を使う理由までは理解できたのですが、なぜ $\log_2 n$ で $\log_{10} n$ などにならにのかがよくわからなかったので。)

[**A11-4**] $\log_{10}$ でも構いません。すべてが $\log_{10} 2 \approx 0.3$ 倍されるだけです。センチとインチの違いと同じです。

[**Q11-5**](文学部) 確率とエントロピーのちがいは何ですか

(質問理由：例えば、サイコロを１回振るとき、ある目がでる確率が $\frac{1}{6}$ ということと、エントロピーが $\log_2 6$ であると表すことのちがいは何なのかがよくわからなかったため。両方とも同じように思えるのですが、ちがいはあるのですか。)

[**A11-5**] きょう、もう少し説明しますが、エントロピーは確率の性質を表すものです。サイコロの目の出方は、出来が悪いときには偏っています。その場合、どのくらい偏っているかを考える一つの尺度がエントロピーであると言うことができます。それが大きいほど偏りが少なく、最小値である 0 となるとき、いつも同じ目がでるサイコロとなります。

[**Q11-6**](文学部)§7.1 の贋銅貨のパズルは運がよくないと３回では分からないということですが、では、ものすごく運が悪いと何回になるんでしょうか。

[**A11-6**] 個数が１２個の場合は、運ととは関係なく解けます。１４個の場合は、３回の手順で識別できる場合が２７通りしかないので、２８通りの場合を分けられるかどうかは多少運が入らざるを

得ません。これは、３個の場合を考えればわかります。つりあえば１回で偽金が残りのものであることがわかりますが、つりあわないときはどちらか一方ということしかわかりません。

[**Q11-7**](法学部).6 の問題がわかりません。オートマトンに出力が付くのと付かないのとの違いがわかりません。

(質問理由：なぜ 7×7 のマスがでてきたのかがわからない。プリントを読んでもわからなかったから。)

[**A11-7**] ２入力の各々が一つの力学系を定めますから、２つの力学系の対でオートマトンをとらえることができるからです。

2001.1.17

２０００年度後期　数理の世界 第１２回
学部：　　　　学科：
学籍番号：　　　　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください.

１：良く知っている　２：知らなかった ３：よくわかった　４：大体わかった　５：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
条件付き確率の定義	–	–			
確率変数	–	–			
ベイズの定理	–	–			
相互情報量	–	–			

意見・希望などがあればどうぞ：

北大理数学 辻下　徹