2000後期 数理の世界　最終回

# 思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

## 目 次



## 10 推論・生成・従属の数理

### 10.1 生成関係の法則

次の文をそれぞれ、$a_1, \cdots, a_n \longrightarrow a$ と略記しよう。

- 命題の集合 $\{ a_1, \cdots, a_n \}$ から命題 $a$ が推論される。
- 分子の集合 $\{ a_1, \cdots, a_n \}$ から分子 $a$ が生成される。
- 変数 $\{ a_1, \cdots, a_n \}$ に、変数 $a$ が従属する。
- 事象 $\{ a_1, \cdots, a_n \}$ が観測されるときは、必ず事象 $a$ も観測される。

このとき、いずれも、次の性質が成り立つ。

1. $a \longrightarrow a,$
2. $a_1, \cdots, a_n \longrightarrow a$ ならば $b, a_1, \cdots, a_n \longrightarrow a,$
3. $a_1, \cdots, a_n \quad \longrightarrow a$ かつ $a, b_1, \cdots, b_m \longrightarrow b$ ならば、$a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \longrightarrow b.$

[1]URL:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html
質問提出アドレス:sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp
[2]研究室：理学部４号館４０３号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp,
Homepage:http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/

## 10.2　束による表現

束 $(L,\leq)$ と、写像 $\rho : A \to L$ との組があるとき、

$$a_1,\cdots,a_n \longrightarrow a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \rho(a) \leq \rho(a_1) \bigvee \rho(a_1) \bigvee \cdots \bigvee \rho(a_n),$$

と定義すると、上の条件を満たす。

逆に、性質Cを満たす $\longrightarrow$ は、このように表現することができる。

$$B \text{ が閉集合} \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad a_1,\cdots,a_n \in B \text{ かつ } a_1,\cdots,a_n \longrightarrow b \text{ ならば } b \in B.$$

このとき、閉集合の全体が束 $L$ となり、

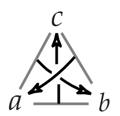
$$\rho(a) := \bigcap_{a \in B, B \text{ は閉集合}} B$$

と置けばよい。

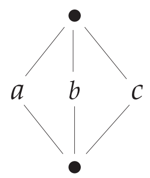
## 10.3　例

### 10.3.1　例 1

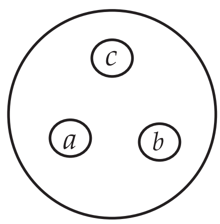
閉集合は、空集合と全体集合以外は $a$,$b$ と $c$. 従って、この３つの中の、どの２つも他の１つを生成（支配・帰結）するが、１つだけでは、何も産み出さない。




Deductive hyperdigraph



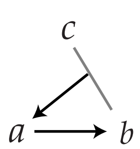

Labeled lattice



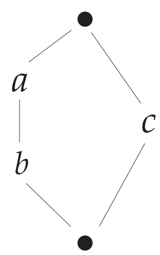

Moore family

### 10.3.2　例 2

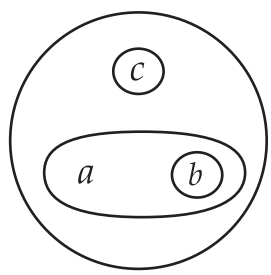
この例では、閉集合は、$b, c$ and $ab$. 従って、$a$ の閉包は $ab$、つまり、$a \to b$. また、$bc$ の閉包は $abc$. 従って $b, c \to a$.




Deductive hyperdigraph




Labeled lattice




Moore family

| $A$ | $A$ の閉包 |
|---|---|
| $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $a$ | $a$ |
| $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ |
| $ab$ | $abc$ |
| $ac$ | $abc$ |
| $bc$ | $abc$ |
| $abc$ | $abc$ |

表 1: 閉包作用素

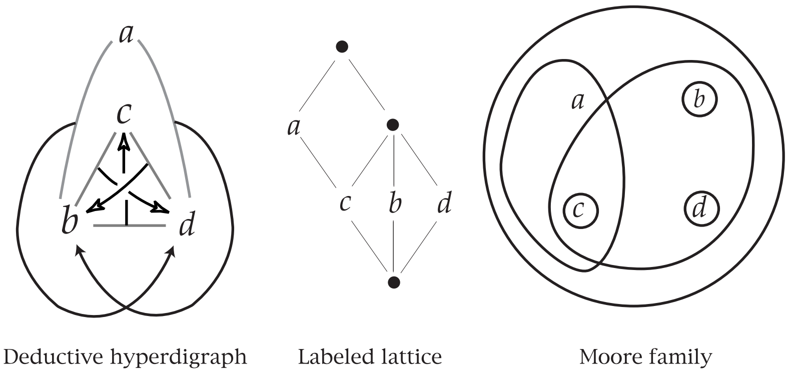
| $A$ | $A$ の 閉包 |
|---|---|
| $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $a$ | $ab$ |
| $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ |
| $ab$ | $ab$ |
| $ac$ | $abc$ |
| $bc$ | $abc$ |
| $abc$ | $abc$ |

表 2: 閉包作用素

### 10.3.3 例 3

５つの閉集合 $b, c, d, ab, bcd$ がある。したがって、$bcd$ の中のどの２つも、他を支配する。$ab$ の閉包は $abcd$ なので、

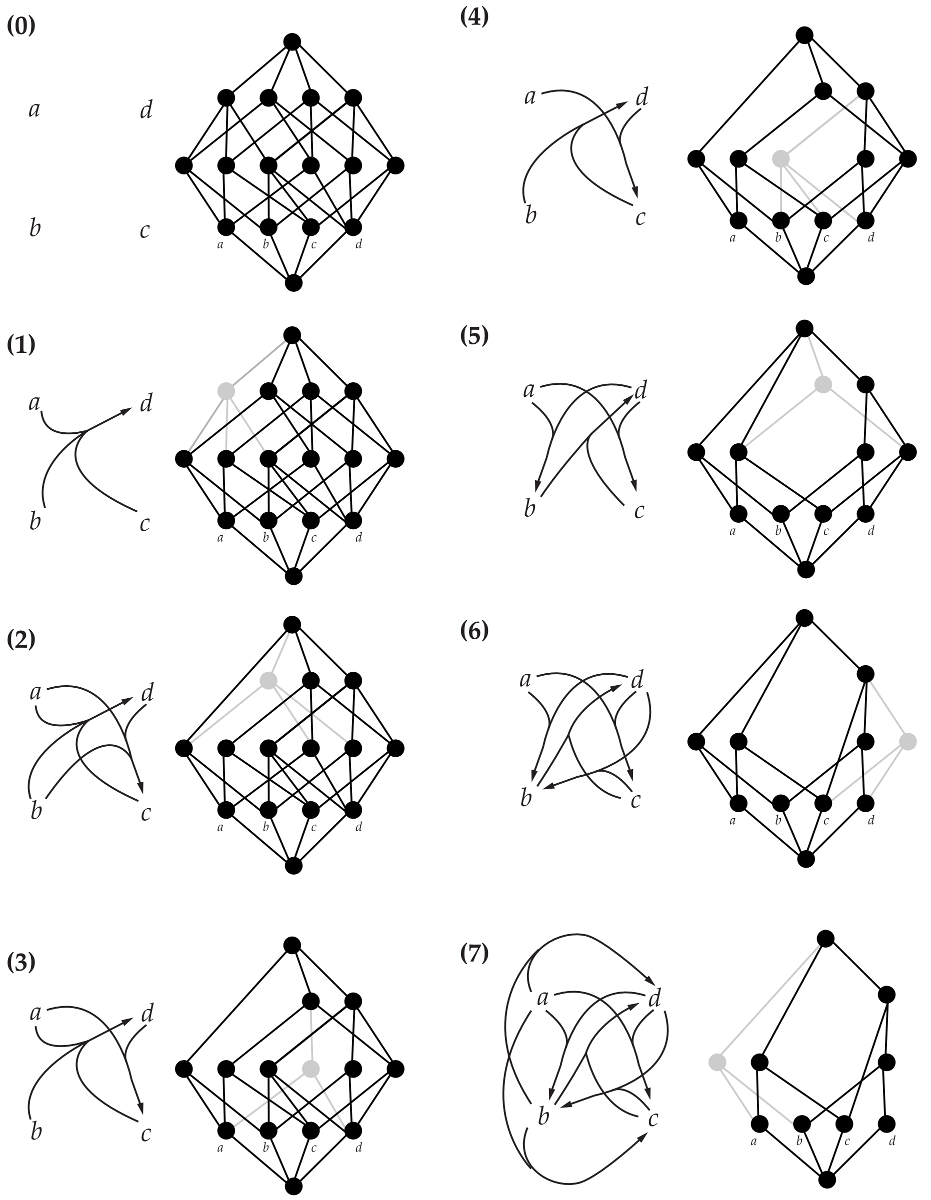
$$a, b {\rightarrow} c \quad a, b {\rightarrow} d.$$



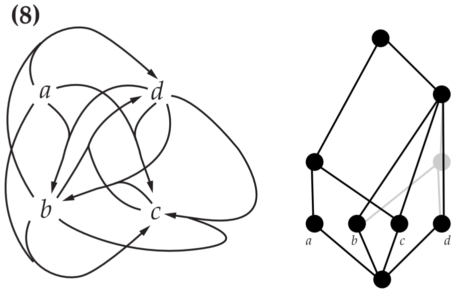

| $A$ | $A$ の閉包 |
|---|---|
| $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ |
| $d$ | $d$ |
| $a, ac$ | $ac$ |
| $bc, bd, cd, bcd$ | $bcd$ |
| $ab, ad, abc, abd, acd, abcd$ | $abcd$ |

表 3: 閉包作用素

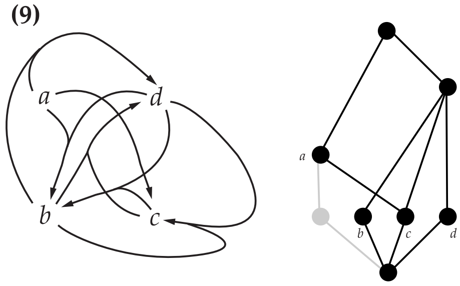
### 10.3.4 ４変数の場合の生成関係の変化


(0)
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)

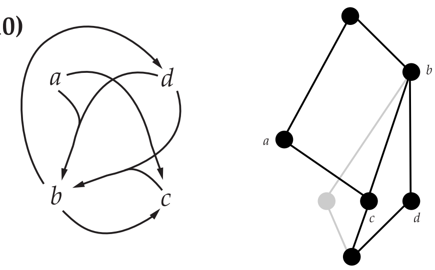
**(8)**



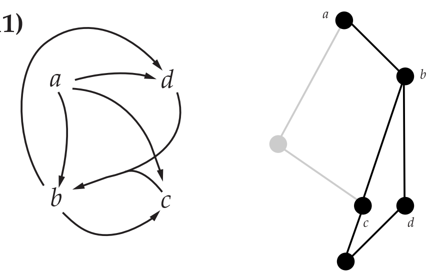

**(9)**



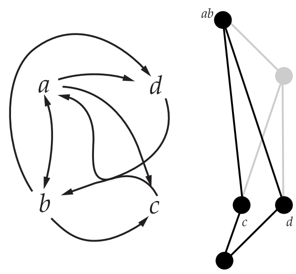

**(10)**



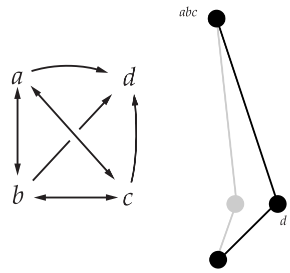

**(11)**



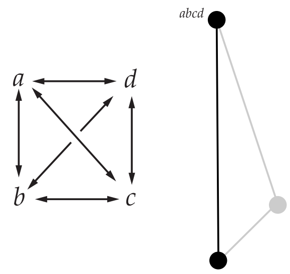

**(12)**



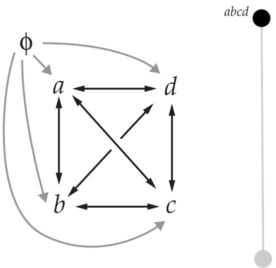

**(13)**




**(14)**




**(15)**



# A　第 13 回質疑

---

[**Q13-1-a**](文学部) 3 者間での相互情報量というのは存在しますか？

[**Q13-1-b**](文学部) 確率空間上の確率変数を 2 つ以上考えたとき、それらの相互情報量も同様に表すことができるのですか。また、表せるとしたらどのように表されるのですか。

(質問理由：確率変数 $X, Y, Z$ があったとき、$Y$ と $Z$ がわかたことにより、どれくらい $X$ のことがわかるのかを、2 つのときと同じように表すことはできそう。だけど、$Y$ がわかったときに $X, Z$ についてどれだけわかるか、ということは同じようにあらわすことができるとは考えにくいから。

[**A13-1**] あります。$I(x,y) := H(x,y) - H(x) - H(y)$ と同じように、個数の式と形式的には同じ定義をします。

$$I(x,y,z) := H(x,y,z) - H(x,y) - H(y,z) - H(z,x) + H(x) + H(y) + H(z).$$

2 変数の場合と違って、これは負の数になることもあります。

---

[**Q13-2**](文学部) 確率が低ければ低いほど、エントロピーは上がるということでいいんですか。

(質問理由：よくわかっていないから)

[**A13-2**] 言葉が少し混乱しています。「確率が低い」が修飾するのは個々の事象ですが、一方、エントロピーは確率分布に関するものであり、「事象のエントロピー」というものはありません。

一つの事象を除いて、事象の確率が低いとき、その確率のエントロピーはゼロに近くなります。

---

[**Q13-3**](法学部) 相互情報量は実際の社会ではどのように使われているのでしょうか。

(質問理由：純粋な興味から)

[**A13-3**] 情報理論の基礎概念ですから、通信技術の至る所で空気のように使われています。また、種々の観測量の間の相互関係を表すものとして、基本的なものです。

---

[**Q13-4**](法学部) もうすこし確率のあいまいさについて詳しく説明してほしいです。)

(質問理由：あいまいさを解消することがより正しい確率を求めるのに必要だと思われますが、そのあいまいさの確率とかも考えられるので。)

[**A13-4**] 確率分布自身の確率分布というものを考えることはできますが、確率分布の全体は無限次元空間となりますから、数学的な取り扱いは難しくなります。

---

[**Q13-5**](法学部) 情報の流れのところで「01 は $A$ で 0, $B$ で 1 という結果を表す」という意味がわかりません。

(質問理由：10 は $A$ で 1, $B$ で 0 ということになるんでしょうか？よくわかりません。)

[**A13-5**] そうです。単に「$A = 0, B = 1$」と書くべきところを「01」と書く、と断っただけの文ですので、深く考えないように。

---

[**Q13-6**](法学部) 確率変数の考え方は他のどんな学問と結びつくのか。

(質問理由：物理か何かの考えを表すことができるのかどうか知りたいから。)

[**A13-6**] 確率変数は確率論の基礎概念ですので、確率論を使う多くの学問と結びついています。物理では統計物理学という大分野が物性（日常出会う物質の性質）を研究していますが、種々の物質系について、取りうる状態が事象で、個々の分子の速度・エネルギー分子同士の相互関係等々は、確率変数であり、その期待値の計算が研究課題の一部となります。

2001.1.31

| ２０００年度後期　数理の世界 第最終回 |
|---|
| 学部：　　　　　　学科： |
| 学籍番号：　　　　　　　　氏名： |
| 質問： |
| 質問理由： |

アンケート

次の表にチェックしてください.

1： 良く知っている　2：知らなかった 3：よくわかった　4：大体わかった　5：まだよくわからない

| 用語 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 順序関係 | – | – | | | |
| 最大限と極大元の違い | – | – | | | |
| 束 | – | – | | | |
| 生成関係 | – | – | | | |
| 閉集合 | – | – | | | |

意見・希望などがあればどうぞ：

北大理数学 辻下　徹