2000 後期 数理の世界

思考の道具としての数学[1]

辻下　徹[2]

理学研究科数学専攻

シラバスより

本講義のねらい

現代数学は高度に専門的な内容を持つ一方、日常世界の事柄を明晰に扱ういろいろな方法を用意している。この講義では、そのような方法の中で数学的技巧を余り必要としないものを取り上げる予定。毎回、具体的な問題を取り上げ、それを解くための道具として、数学の概念や理論を紹介し、使い方の練習をする。

授業内容

◆有向グラフ 錯綜した関係は有向グラフを描くことにより分析が容易になる。

◆力学系・オートマトン 変化する対象は、状態と遷移規則という力学系によって、記述され分析できる。

◆エントロピー・情報量 状況のあいまいさの程度を測るエントロピーは、あいまいさを減少させる情報の大きさを測る尺度も与える。

◆順序・束 順序構造・束は相互依存関係・論理的相互関係などを明晰に表現する強力な道具である。

◆記号論理学 錯綜した状況において推論を精密にする。

教科書・参考書

講義時に資料を配付する。この講義のホームページは
`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html`

[1]URL:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/sw00.html`
質問提出アドレス:`sw00@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp`

[2]研究室：理学部４号館４０３号室、011-706-3823
連絡は電子メールで：Email:`tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp`,
Homepage:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/`

合否・成績等について

- 毎回、講義終了時に「質問表」を提出してもらいます。講義の中で疑問に思った点・わからなかった点について質問し、その質問の理由（なぜ、そういう質問をするのか、どういう意味でわからなかったか、など）を書いてください。次の回に質問の一部に答えるようにします。

  的確な質問をする訓練ということも重視しますので、質問の仕方を採点し成績の一部とします。わからないことを明確にするための質問や講義の説明で不明だった点を具体的に聞く質問を高く評価します。感想や漠然とした質問（「数学はどのように役にたつのですか？」）は評価は低くなります。

- 最後に、割り当てられた問題について報告を提出してもらいます。

- 以上を参考にして合否判定をし、成績をつけます。

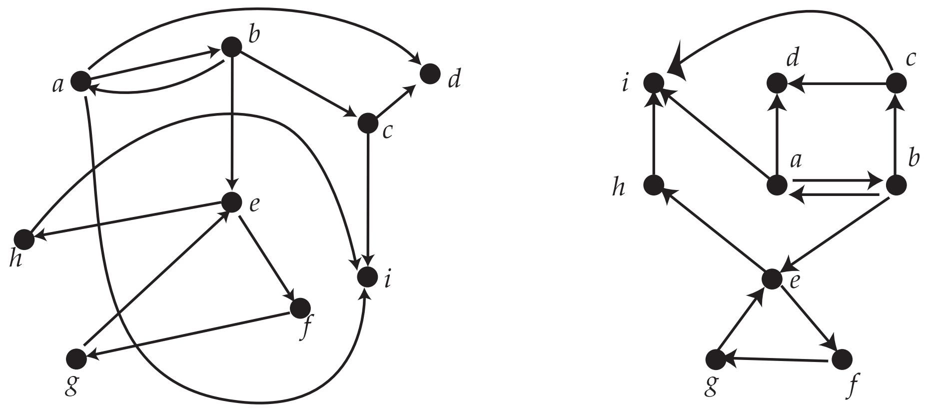


図 1: 有向グラフの例：同じグラフの２通りの表示

1 有向グラフ

1.1

$\boxed{a \to b}$ という図は色々な意味を持つ。非対称な２項関係を考えるとき、a,b の間に関係があることを記すのに使われる。

表 1: 例

a, b	$a \to b$
バス停	a の次に b に止る
人間	a は b の親 a は b の上司
状態	状態 a が状態 b に変化する 状態 a を状態 b に変えることができる
生物種	a は b の先祖

[**問 1**] 他の例を３つ挙げよ。

1.2

$\boxed{\bullet \to \bullet}$ を組合わせた図を**有向グラフ**(directed graph, digraph) と言う。場合によっては単にグラフということもある。

この２つの図は同じ有向グラフと考える。つまり、図が表している情報の中で、頂点と頂点がつながっているかどうか以外の情報（頂点の場所、辺の曲がり具体等、には関心を持たない（無視する)。

1.3　グラフの表す情報の表示法

上のグラフの情報は、種々の仕方で表現できる。情報は次の２つから成り立っている。

頂点の集合 $\{\, a, b, c, d, e, f, g, h, i \,\}$

辺の集合 $\{\, ab, ad, ai, bc, ba, be, cd, ci, eh, ef, fg, ge, hi \,\}$　（ただし、xy は、x から y への辺があることを示す。）

逆に、この２つの情報があると平面上に図が書ける。図には無数の多様性があるが、上の２つの情報が再現できれば、どれも同じグラフと考える。

1.4　集合の基礎概念：集合演算・部分集合・順序対・直積集合

現代数学では、有向グラフを集合論の言葉で定義する。それを紹介しておこう。

数学で使う「集合」という言葉は、日常的な集合という言葉と多少は関係があるが、実際にはテクニカルターム（technical term) であり、その言葉の使い方が明確に定められている（と言っても数学の中でも種々の明確さがあるのだが)。

[1.4–1] 基本的な言い回しは「a が X に属する」「a は X の要素である」「X は a を含む」で、全く同じ意味で用いる。言葉の多様性からくる混乱を少なくするために、以上のことを「$a \in X$」と書く。$X \ni a$ と書くこともある。

[1.4–2] 集合の表示法は２通りある。要素を書き上げる**外延的記法** $\{\, a, b, c, \cdots \,\}$。要素が満たすべき性質により表示する**内包的記法** $\left\{\, x \;\middle|\; x \text{ は性質 } P(x) \text{ を満たす} \,\right\}$。

[1.4–3] 具体的な集合としては、**空集合**$\emptyset$、１点集合 $\{\, a \,\}$、自然数の集合 $\mathbb{N} = \{\, 1, 2, 3, \cdots \,\}$ などがある。

[1.4–4] 集合 A の要素を一部だけ集めたものを**部分集合**と言う。B が A の部分集合であることを $B \subseteq A$ と書く。

[1.4–5] 新しい集合を作る方法が色々ある。A,B が集合のとき、**積集合**$A \cap B$ は両方に含まれる要素からなる集合, **和集合** $A \cup B$ は、少なくとも一方に含まれている要素のなす集合を表す。

[1.4–6] A の要素 a と B の要素 b を対にしたものを (a, b) と書き、**順序対**と呼ぶ。順序対をすべて集めたものを**直積集合** といい $A \times B$ と書く。 したがって

$$A \times B = \left\{\, (a, b) \;\middle|\; a \in A, b \in B \,\right\}$$

と表現できる。

1.5　有向グラフの集合論的定義

頂点集合 V と、直積集合 $V \times V$ の部分集合 E の組 (V, E) を**有向グラフ**という。V の要素を**頂点**,E の要素を**辺**という。辺 (a, b) の **始点**とは a のことをいい、 **終点**とは b のことをいう。(a, b) が辺のとき、象徴的に $a {\to} b$ と書く。

図のグラフは、$V = \{\, a, b, c, d, e, f, g, h, i \,\}$, $E = \{\, ab, ad, ai, bc, ba, be, cd, ci, eh, ef, fg, ge, hi \,\}$ で与えられる。ただし、ここでは、順序対 (x, y) を xy と略記している。

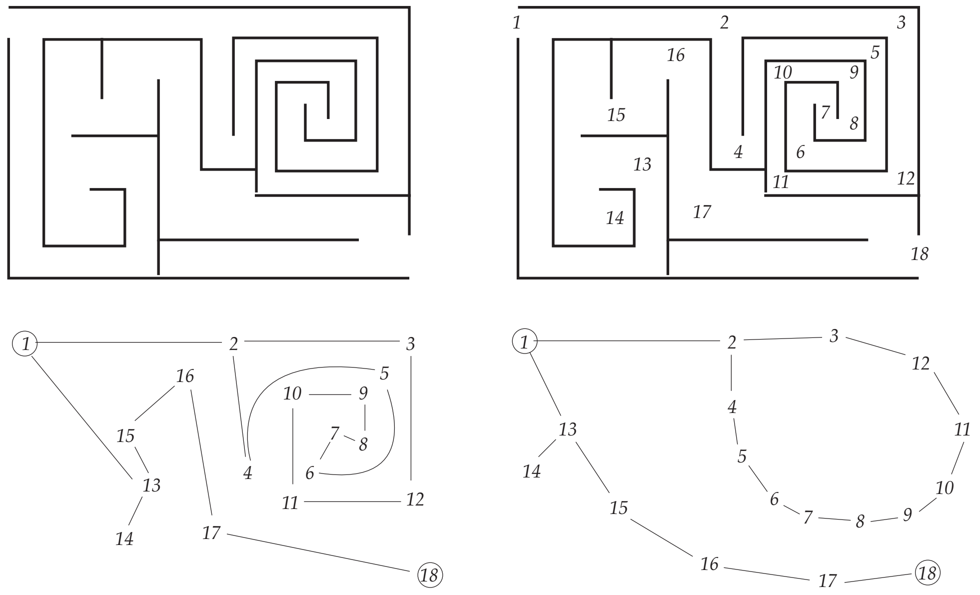
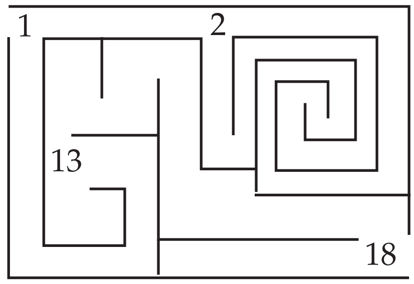


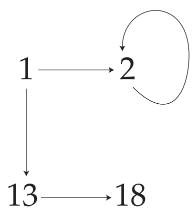
図 2: 迷路の構造を表す有向グラフ

1.6　迷路への応用

迷路は有向グラフで表示できる。

表示の仕方にはかなり任意性がある。特に、頂点をどこに取るかは、迷路を解くという目的だけに関して言えば、分岐点だけにしてもよい：





種々の問題が迷路と「同型」の問題となる。

1.7 パズルへの応用

[**問 2**] 渡し守りのパズル (Ferryman's Puzzle)

渡し守が旅人に犬・羊・キャベツのつつみを川の向こう岸まで運ぶことを頼まれた。渡し舟には一度に、この３つの内の２つ以上は乗せることはできない。そのうえ困ったことに、渡し守の居ないところでは、羊はキャベツを食べてしまうし、狼は羊を食べてしまうのである。渡し守は仕事を引き受けてよいのであろうか？

解き方

[1.7–1] 状態と相互関係を有向グラフで表示する。

- 状態の設定し状態の記述法を決める
- 状態の数え上げる
- 状態を平面に配置
- 直接移れる状態同志を線で結ぶ

[1.7–2] 最初の状態と目的の状態とを結ぶ道を探す。

[**問 3**] 水差しパズル

容量がそれぞれ 8,5,3 $d\ell$ の水差し A, B, C がある。水差し A にはワインが満たされている。このワインを２等分するにはどうしたらよいだろうか。ただし、この３つの水差し以外、どんな計量器も使えない。

[**問 4**] ３人宣教師と３人の首刈族

３人宣教師と３人の首刈族の一行は大きな川を渡らなければならない。運よく２人乗りの小舟が見つかったのだが、困ったことに一箇所に首刈族が宣教師よりも大勢いるようなことになると、宣教師は食べられてしまうのである。この一行全員が生きてこの川を渡ることは果たしてできるのであろうか？

[**問 5**] やきもちやきの３亭主

旅の途上にある３組の夫婦がとある川辺にやってきたが、２人乗りの舟しか見あたらない。どの亭主も異常な程やきもちやきで、自分の居ない所で細君が他の亭主と一緒になることが我慢できない。３組とも対岸に渡って一緒に旅を続けることができるであろうか？(舟が岸に着いたとき、その岸に居る人は舟に乗っている人とも同じ所にいると考える。)

[**問 6**] 水差しパズルで、A,B,C の容量を変えたときはどうなるか？

[**問 7**] 宣教師と首刈族が４人ずつの場合はどうなるか？

2000.10.11

２０００年度後期　数理の世界 第１回
学部：　　　　　　学科：
学籍番号：　　　　　　　氏名：
質問：
質問理由：

アンケート

次の表にチェックしてください．

1： 良く知っている　2：知らなかった　3：今日の講義でよくわかった　4：今日の講義で大体わかった　5：まだよくわからない

用語	1	2	3	4	5
集合					
要素（元）					
部分集合					
順序対					
直積					
有向グラフ					
問２のパズル					